Plaquette 4 – Séries à termes quelconques, produit de Cauchy et familles sommables

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critère spécial. (a_n) décroissante de limite nulle $\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ converge et $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Critère d'Abel (Dirichlet). (a_n) décroissante de limite nulle et $\left(\sum_{k \leq n} b_k\right)$ bornée $\Rightarrow \sum a_n b_n$ converge.

Produit de Cauchy. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent **absolument**, alors $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ définit une série absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

Familles sommables. $(u_{p,q})$ est sommable si $\sum_{p,q} |u_{p,q}| < +\infty$ (calculable par paquets, dans n'importe quel ordre). Alors on peut sommer par lignes, par colonnes, ou par paquets quelconques, avec le même résultat.

Correction de l'exercice 1 – Séries de Riemann alternées

— Si $\alpha > 1$: $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$, série de Riemann convergente : **convergence absolue**.

— Si $0 < \alpha \leq 1$: $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ est décroissante de limite nulle, donc la série converge par le critère spécial ; elle ne converge pas absolument ($\alpha \leq 1$) : **semi-convergence**.

— Si $\alpha \leq 0$: $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = n^{-\alpha} \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0 : **divergence grossière**.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, le critère donne de plus

$$\left|\sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

ce qui permet un calcul approché, lent si α est petit.

Réponse. $\alpha > 1$: absolue ; $0 < \alpha \leq 1$: semi-convergente ; $\alpha \leq 0$: divergence grossière.

Correction de l'exercice 2 – Développements de termes alternés

a) sin est impaire : $u_n = (-1)^n \sin\frac{1}{n}$, et $\sin\frac{1}{n}$ décroît vers 0 : convergence par le critère spécial (non absolue, $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$).

b) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ avec $x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$:

$$v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

somme d'une série convergente (critère spécial), d'une série absolument convergente et de $-\frac{1}{2n}$, divergente : $\sum v_n$ **diverge**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)$, le second terme étant $O(n^{-5/2})$: convergence. (Ici on pouvait aussi vérifier que $\frac{\cos(1/n)}{\sqrt{n}}$ décroît.)

Réponse. a) converge ; b) $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O(n^{-3/2})$: diverge ; c) converge.

Correction de l'exercice 3 – Série alternée perturbée selon un paramètre

a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}$ et $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$$

b) $\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge (critère spécial). Le reste $r_n = -\frac{1}{n^{2\alpha}} + O(n^{-3\alpha})$ est équivalent à $-\frac{1}{n^{2\alpha}}$, de signe constant : $\sum r_n$ converge $\Leftrightarrow 2\alpha > 1$. Donc $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

c) $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$: convergence absolue $\Leftrightarrow \alpha > 1$. Pour $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, semi-convergence.

Réponse. Converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$; absolument $\Leftrightarrow \alpha > 1$.

Correction de l'exercice 4 – Critère d'Abel et séries trigonométriques

a) Avec $b_k = B_k - B_{k-1}$ ($B_{-1} = 0$) et un changement d'indice (transformation d'Abel) :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k b_k = \sum_{k=0}^{N} a_k B_k - \sum_{k=0}^{N-1} a_{k+1} B_k = a_N B_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

b) $|a_N B_N| \le M a_N \to 0$. Et $|(a_k - a_{k+1})B_k| \le M(a_k - a_{k+1})$, terme positif d'une série télescopique convergente (de somme a_0) : la série $\sum(a_k - a_{k+1})B_k$ converge absolument. Donc $\sum a_k b_k$ converge.

c) $a_n = n^{-\alpha}$ décroît vers 0, et $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}\right| \le \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$ (somme géométrique de raison $\neq 1$). En prenant parties réelle et imaginaire, $\sum\frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum\frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ convergent aussi.

Réponse. Transformation d'Abel : $\sum a_n b_n$ converge ; en particulier $\sum\frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$, $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 5 – Une série semi-convergente : sinus de n sur n

a) Critère d'Abel avec $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = \sin n$, de sommes partielles bornées ($1 \notin 2\pi\mathbb{Z}$).

b) $|\sin n| \le 1$ donc $|\sin n| \ge |\sin n|^2 = \sin^2 n$, et $\sin^2 n = \frac{1 - \cos(2n)}{2}$.

c) On a

$$\frac{|\sin n|}{n} \ge \frac{1}{2n} - \frac{\cos(2n)}{2n}$$

$\sum\frac{\cos(2n)}{2n}$ converge (Abel, $2 \notin 2\pi\mathbb{Z}$) et $\sum\frac{1}{2n}$ diverge : les sommes partielles du membre de droite tendent vers $+\infty$. Par comparaison des sommes partielles, $\sum\frac{|\sin n|}{n}$ diverge : la série $\sum\frac{\sin n}{n}$ est semi-convergente.

Réponse. $\sum\frac{\sin n}{n}$ converge (Abel) mais pas absolument : $|\sin n| \ge \frac{1 - \cos 2n}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Calcul approché de l'inverse de e

a) $a_n = \frac{1}{n!}$ est décroissante de limite nulle : le reste vérifie $|R_N| \le a_{N+1}$.

b) $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \approx 1{,}98 \times 10^{-4}$ ne suffit pas ; $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320} \approx 2{,}5 \times 10^{-5}$ convient : $N = 7$.

$$S_7 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} = \frac{1854}{5040} \approx 0{,}367857$$

c) Oui : le reste a le signe de son premier terme $\frac{(-1)^8}{8!} > 0$, donc $S_7 < \frac{1}{\mathrm{e}} < S_7 + \frac{1}{8!}$, soit $0{,}367857 < \frac{1}{\mathrm{e}} < 0{,}367882$ (et en effet $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0{,}367879$).

Réponse. $N = 7$: $S_7 = \frac{1854}{5040} \approx 0{,}367857$, par défaut, à moins de $2{,}5 \times 10^{-5}$.

Correction de l'exercice 7 – Un produit de Cauchy divergent

a) $a_k a_{n-k} = \frac{(-1)^k (-1)^{n-k}}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$ et $(-1)^k (-1)^{n-k} = (-1)^n$.

b) Inégalité arithmético-géométrique : $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$ avec $x = k+1$, $y = n-k+1$, $x + y = n + 2$. Chacun des $n+1$ termes est donc $\ge \frac{2}{n+2}$:

$$|c_n| \ge \frac{2(n+1)}{n+2} \longrightarrow 2$$

c) $c_n \not\to 0$: la série produit **diverge grossièrement**. Le théorème exige la convergence **absolue** des deux séries (ici $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ diverge) ; la semi-convergence ne suffit pas.

Réponse. $|c_n| \ge \frac{2(n+1)}{n+2} \to 2$: le carré de Cauchy diverge, faute de convergence absolue.

Correction de l'exercice 8 – Produit de Cauchy de séries géométriques

a) $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k x^{n-k} = (n+1)x^n$. Les séries étant absolument convergentes ($|x| < 1$) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

b) $c_n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k} = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$ (somme géométrique de raison $\frac{x}{y}$, ou identité de factorisation), d'où $\sum c_n = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.

c) Avec $x = \frac{1}{3}$: $\frac{1}{(2/3)^2} = \frac{9}{4}$.

Réponse. $\sum (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$; $\sum c_n = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$; $\sum \frac{n+1}{3^n} = \frac{9}{4}$.

Correction de l'exercice 9 – Une famille double sommable

a) Les termes sont positifs, on peut sommer par paquets. I_n contient $n-1$ couples ($n \ge 2$), tous de valeur $n^{-\alpha}$:

$$\sum_{(p,q)} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n \ge 2} \frac{n-1}{n^\alpha}$$

et $\frac{n-1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{n^{\alpha-1}}$: sommable $\Leftrightarrow \alpha - 1 > 1$.

b) $\sum_{n \ge 2} \frac{n-1}{n^3} = \sum_{n \ge 2} \frac{1}{n^2} - \sum_{n \ge 2} \frac{1}{n^3} = (\zeta(2) - 1) - (\zeta(3) - 1) = \zeta(2) - \zeta(3)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Oui, par Fubini positif : $\sum_p \sum_q \frac{1}{p^2 q^2} = \sum_p \frac{\zeta(2)}{p^2} = \zeta(2)^2 = \frac{\pi^4}{36}$.

Réponse. Sommable $\Leftrightarrow \alpha > 2$; pour $\alpha = 3$: $\zeta(2) - \zeta(3)$; $\sum \frac{1}{p^2 q^2} = \zeta(2)^2$.

Correction de l'exercice 10 – Somme des zêta moins un

a) Pour $n \geq 2$ fixé, $\sum_{p \geq 2} \frac{1}{n^p} = \frac{1/n^2}{1 - 1/n} = \frac{1}{n(n-1)}$. Termes positifs : la famille est sommable car

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 < +\infty$$

b) Sommabilité : on peut sommer dans l'autre ordre, $\sum_{p \geq 2} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^p} = \sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1) = 1$.

c) Pour $n \geq 2$: $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{n^{2p}} = \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$, et $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ (télescopage à deux pas).

Réponse. $\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1) = 1$ et $\sum_{p \geq 1} (\zeta(2p) - 1) = \frac{3}{4}$ (Fubini positif).

Correction de l'exercice 11 – Quand Fubini échoue

a) Pour chaque ligne p, seuls $u_{p,p} = 1$ et $u_{p,p+1} = -1$ sont non nuls : $\sum_q u_{p,q} = 0$, donc la somme par lignes vaut 0.

b) Colonne $q = 1$: seul $u_{1,1} = 1$. Colonne $q \geq 2$: $u_{q,q} = 1$ et $u_{q-1,q} = -1$, somme nulle. Donc

$$\sum_q \left(\sum_p u_{p,q} \right) = 1 \neq 0 = \sum_p \left(\sum_q u_{p,q} \right)$$

c) La famille n'est pas sommable : $\sum_{p,q} |u_{p,q}| = \sum_p 2 = +\infty$. Le théorème de Fubini pour les familles sommables ne s'applique donc pas, et l'ordre de sommation change le résultat.

Réponse. Lignes : 0 ; colonnes : 1 ; la famille n'est pas sommable ($\sum |u_{p,q}| = +\infty$).

Correction de l'exercice 12 – Série de Lambert et nombre de diviseurs

a) Termes positifs ; pour n fixé, $\sum_{k \geq 1} x^{nk} = \frac{x^n}{1 - x^n} \leq \frac{x^n}{1 - x}$, terme d'une série convergente : la famille est sommable.

b) On somme par paquets $J_m = \{(n,k) \mid nk = m\}$, de cardinal $d(m)$ (un couple par diviseur n de m) :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n,k \geq 1} x^{nk} = \sum_{m \geq 1} \operatorname{card}(J_m)\, x^m = \sum_{m \geq 1} d(m) x^m$$

c) $d(1), \ldots, d(6) = 1, 2, 2, 3, 2, 4$. À gauche : $\frac{x}{1-x} = x + x^2 + \cdots$ apporte 1 à chaque x^m, $\frac{x^2}{1 - x^2}$ apporte 1 aux puissances paires, $\frac{x^3}{1 - x^3}$ aux multiples de 3, etc. : coefficient de x^6 = $1 + 1 + 1 + 1$ ($n = 1, 2, 3, 6$) $= 4$ ✓.

Réponse. $\sum \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum d(m) x^m$ (regroupement selon $m = nk$).

Correction de l'exercice 13 – Regroupement par paquets de signe constant

a) Pour $k^2 \leq N < (k+1)^2$, la somme partielle S_N est comprise entre $T_{k-1} = \sum_{j < k} (-1)^j b_j$ et T_k, car les termes du paquet k ont tous le signe $(-1)^k$: S_N va de T_{k-1} à T_k de façon

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

monotone. Si $T_k \to T$, alors $S_N \to T$.

b) $b_k = H_{k^2+2k} - H_{k^2-1} = \ln\dfrac{k^2+2k}{k^2-1} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$, et

$$\frac{k^2+2k}{k^2-1} = 1 + \frac{2k+1}{k^2-1} = 1 + \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

d'où $b_k = \dfrac{2}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$.

c) $\sum (-1)^k b_k = \sum \dfrac{2(-1)^k}{k} + \sum O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ converge (critère spécial + convergence absolue). Par a), $\sum u_n$ converge.

Réponse. Paquets de signe constant de taille $\sim \frac{2}{k}$: $\sum (-1)^k b_k$ converge, donc $\sum \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ aussi.

Correction de l'exercice 14 – Réarrangement d'une série absolument convergente

a) $M = \max\{\sigma^{-1}(0), \dots, \sigma^{-1}(N)\}$ convient.

b) Pour $m \geq M$, les indices $\sigma(0), \dots, \sigma(m)$ contiennent $0, \dots, N$; les autres sont des entiers distincts $> N$. Donc

$$\left| \sum_{k=0}^{m} u_{\sigma(k)} - \sum_{n=0}^{N} u_n \right| \leq \sum_{n>N} |u_n| \leq \varepsilon$$

c) Comme $\left|\sum_{n \leq N} u_n - S\right| \leq \varepsilon$ aussi, on obtient $\left|\sum_{k \leq m} u_{\sigma(k)} - S\right| \leq 2\varepsilon$ pour $m \geq M$: convergence vers S. Le même argument appliqué à $|u_n|$ donne la convergence absolue. Pour une série semi-convergente, un réarrangement peut changer la somme ($\frac{3}{2}\ln 2$ au lieu de $\ln 2$ pour la série harmonique alternée), voire la faire diverger (théorème de Riemann).

Réponse. Tout réarrangement d'une série absolument convergente converge vers la même somme ; faux pour une série semi-convergente.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction êta de Dirichlet

a) Critère spécial : $\frac{1}{n^s}$ décroît vers 0. La somme est comprise entre deux sommes partielles consécutives, $S_2 = 1 - 2^{-s}$ et $S_1 = 1$; en particulier $\eta(s) > 0$.

b) Pour $s > 1$, la série converge absolument : on peut séparer pairs et impairs. Les termes pairs donnent $\sum_k \frac{1}{(2k)^s} = 2^{-s}\zeta(s)$, les impairs $\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s)$; donc

$$\eta(s) = \left(1 - 2^{-s}\right)\zeta(s) - 2^{-s}\zeta(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s)$$

c) $\eta(2) = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$, et $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$.

d) $|R_N| \leq \dfrac{1}{(N+1)^2} \leq 10^{-4}$ dès que $N \geq 99$: 99 termes suffisent. Par comparaison, pour $\zeta(2)$ le reste vaut environ $\frac{1}{N}$: il en faudrait environ 10^4. Passer par η accélère le calcul.

Réponse. $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$; $\eta(2) = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$; 99 termes pour 10^{-4}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).