# Plaquette 5 – Calculs de sommes et problèmes de synthèse

## Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

**Méthode**

Pour **calculer** une somme, on cherche un **télescopage** (décomposition en éléments simples, arctan, factorielles, produits trigonométriques), on écrit le terme général comme une **intégrale** $\int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x$ pour sommer une série géométrique sous l'intégrale (en contrôlant le reste par une majoration explicite, sans interversion admise), ou l'on part d'une série connue (exponentielle, géométrique et ses dérivées). Les problèmes de synthèse mêlent ces calculs à des **développements asymptotiques** (suites récurrentes, termes oscillants) et à des arguments arithmétiques (irrationalité de e, nombres premiers, $\zeta(2)$).

### Exercice 1 – Décomposition en éléments simples et télescopage

a) Calculer $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

b) Calculer $\sum_{n\geq 1}\dfrac{n}{(n+1)!}$.

c) Calculer $\sum_{n\geq 0}\dfrac{n^2+1}{n!}$.

### Exercice 2 – Somme arctangente

a) Montrer que pour $n\geq 0$, $\arctan(n+1)-\arctan n=\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

b) En déduire $\sum_{n\geq 0}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

c) Calculer de même $\sum_{n\geq 1}\arctan\dfrac{2}{n^2}$ (écrire $\dfrac{2}{n^2}=\dfrac{(n+1)-(n-1)}{1+(n+1)(n-1)}$).

### Exercice 3 – La série de Leibniz

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{N}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}=\int_0^1\dfrac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire $\sum_{k\geq 0}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}=\dfrac{\pi}{4}$, avec un reste majoré par $\dfrac{1}{2N+3}$.

c) Combien de termes faut-il pour obtenir $\pi$ à $10^{-3}$ près par cette formule ?

### Exercice 4 – Série logarithmique

Soit $x\in[-1,1[$.

a) Montrer que $\sum_{n=1}^{N}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)-\int_0^x\dfrac{t^N}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire $\sum_{n\geq 1}\dfrac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

c) Calculer $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n2^n}$ et $\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 5 – Sommes de polynômes fois une géométrique

Soit $x \in ]-1,1[$ et $T_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$.

a) En dérivant l'égalité $T_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ (somme finie), montrer que $\sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

b) En dérivant une seconde fois, calculer $\sum_{n\geq 1} n^2 x^n$.

c) Application : $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^n}$, et l'espérance de $X^2$ pour $X$ de loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

## Exercice 6 – Produit de cosinus et formule de Viète

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer par récurrence que $\sin x = 2^N \sin\frac{x}{2^N} \prod_{n=1}^{N} \cos\frac{x}{2^n}$.

b) En déduire $\sum_{n\geq 1} \ln\cos\frac{x}{2^n} = \ln\frac{\sin x}{x}$.

c) Avec $x = \frac{\pi}{2}$, en déduire la formule de Viète $\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots$.

## Exercice 7 – Sommes par intégrales

a) Calculer $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$ en écrivant $\frac{1}{3n+1} - \frac{1}{3n+2} = \int_0^1 (x^{3n} - x^{3n+1})\,dx$.

b) Calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(2n+1)}$.

## Exercice 8 – Une récurrence additive

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $u_n \to +\infty$ et que $u_{n+1}^2 - u_n^2 \to 2$. En déduire $u_n \sim \sqrt{2n}$.

b) Montrer que $u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$, puis que $u_n^2 = 2n + \frac{1}{2}\ln n + o(\ln n)$.

c) Nature de $\sum \frac{1}{u_n}$ et de $\sum \frac{1}{u_n^3}$.

## Exercice 9 – Sinus d'une racine presque entière

Soit $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

a) Montrer que $\pi\sqrt{n^2+1} = n\pi + \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

b) En déduire $u_n = (-1)^n \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

c) Nature de $\sum u_n$ et de $\sum |u_n|$. Même question pour $\sum \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

## Exercice 10 – Irrationalité de e

On suppose $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $A = q!\left(\mathrm{e} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right)$ est un entier.

b) Montrer que $0 < A < \frac{1}{q}$ en comparant le reste à une série géométrique.

c) Conclure. Peut-on adapter l'argument à $\mathrm{e}^{-1}$ ?

## Exercice 11 – Divergence de la série des inverses des nombres premiers

Soit $N \geq 2$ et $P_N$ l'ensemble des nombres premiers $\leq N$.

a) Montrer que $\prod_{p \in P_N} \frac{1}{1 - 1/p} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ (développer chaque facteur en série géométrique et utiliser la décomposition en facteurs premiers).

b) Montrer que $-\ln(1-x) \leq x + x^2$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

c) En déduire $\sum_{p \in P_N} \frac{1}{p} \geq \ln\ln N - C$ pour une constante $C$, et conclure.

## Exercice 12 – Reste d'une série exponentielle

Soit $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k!}$.

a) Montrer que $\frac{1}{(n+1)!} \leq R_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}$.

b) En déduire $R_n \sim \frac{1}{(n+1)!}$ et la nature de $\sum R_n$.

c) Calculer $\sum_{n \geq 0} R_n$ (intervertir dans la famille positive $\left(\frac{1}{k!}\right)_{0 \leq n < k}$).

## Exercice 13 – Somme alternée de restes

Soit $r_n = \sum_{k>n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, reste de la série harmonique alternée ($n \geq 0$, $r_0 = \ln 2$).

a) Rappeler que $r_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que $\sum r_n$ converge.

c) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ en sommant la série géométrique sous l'intégrale.

## Exercice 14 – Moyenne de Cesàro d'une série convergente

Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme $S$, de sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

a) Montrer que $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k \to S$.

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{n+1-k}{n+1} u_k \to S$.

c) Application : $\sum (-1)^n$ diverge, mais que vaut la limite de la moyenne de Cesàro de ses sommes partielles ?

## Exercice 15 – Synthèse : la somme des inverses des carrés

Soit $m \geq 1$ et $\theta_k = \frac{k\pi}{2m+1}$ pour $1 \leq k \leq m$.

a) En prenant la partie imaginaire de $(\cos\theta + i\sin\theta)^{2m+1}$, montrer que $\sin((2m+1)\theta) = \sin^{2m+1}\theta \cdot P\left(\operatorname{cotan}^2\theta\right)$ avec $P = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{2m+1}{2j+1} X^{m-j}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que les $\operatorname{cotan}^2\theta_k$ sont les $m$ racines de $P$, puis que $\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\theta_k = \frac{m(2m-1)}{3}$.

c) À l'aide de $\sin x < x < \tan x$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que $\operatorname{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < 1 + \operatorname{cotan}^2 x$.

d) En déduire $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).