Plaquette 1 – Critères de convergence, comparaison et séries alternées

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On teste d'abord le **terme général**, on compare à une **série de Riemann** ou **géométrique** par équivalents, on utilise **d'Alembert** ou **Cauchy** pour les factorielles et les puissances, et le critère des **séries alternées** pour les signes changeants.

Exercice 1 – Divergence grossière

Étudier la nature de $\sum \frac{n}{n+1}$ et de $\sum \cos\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 2 – Comparaison par équivalents

Étudier la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n^3+2n}$.

Exercice 3 – Règle de d'Alembert

Étudier la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$ et de $\sum \frac{2^n}{n!}$.

Exercice 4 – Règle de Cauchy

Étudier $\sum \left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^n$.

Exercice 5 – Comparaison série-intégrale

Montrer que $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$ diverge.

Exercice 6 – Série alternée

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, et majorer le reste R_{100}.

Exercice 7 – Convergence absolue

Étudier $\sum \frac{\sin n}{n^2}$.

Exercice 8 – Calcul d'une somme télescopique

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Série géométrique dérivée

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Exercice 10 – Reste d'une série convergente

Soit $S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. Encadrer le reste $R_N = \sum_{n > N} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 11 – Produit de Cauchy

Calculer le produit de Cauchy de $\sum \frac{x^n}{n!}$ par elle-même et interpréter.

Exercice 12 – Comparaison logarithmique : coefficients binomiaux centraux

Soit $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que $\ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = -\dfrac{1}{2n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La règle de d'Alembert conclut-elle ?

b) En déduire que $\ln u_n + \frac{1}{2} \ln n$ converge, puis qu'il existe $K > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{K}{\sqrt{n}}$.

c) Nature de $\sum u_n$ et de $\sum \dfrac{u_n}{n}$.

Exercice 13 – Transformation d'Abel

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$.

a) Montrer que $|S_n| \leq \dfrac{1}{|\sin(\theta/2)|}$.

b) Avec $\sin(k\theta) = S_k - S_{k-1}$, montrer que $\sum_{k=1}^{N} \dfrac{\sin(k\theta)}{k} = \dfrac{S_N}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} S_k \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$.

c) En déduire que $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ converge.

Exercice 14 – Série alternée non monotone

Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ pour $n \geq 2$.

a) Le critère spécial des séries alternées s'applique-t-il ?

b) Montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.

c) En déduire que $\sum u_n$ diverge, bien que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 15 – Synthèse : nature selon un paramètre

Discuter selon $\alpha > 0$ la nature de $\sum_{n \geq 2} \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).