Plaquette 3 – Sommes partielles et restes : équivalents et développements asymptotiques

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour estimer une **somme partielle** d'une série divergente ou un **reste** d'une série convergente, trois outils : la **comparaison série-intégrale** (encadrement par $\int f$ pour f monotone), la **sommation des relations de comparaison** (des termes positifs équivalents ont des sommes partielles équivalentes si la série diverge, des restes équivalents si elle converge), et le **télescopage** : on cherche une suite (a_n) dont les différences $a_{n+1}-a_n$ approchent le terme général, puis on raffine par étapes successives (constante d'Euler, Stirling).

Exercice 1 – La constante d'Euler et le terme suivant

Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$.

a) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$, et en déduire que (u_n) converge vers un réel γ.

b) En sommant les équivalents des restes, montrer que $u_n - \gamma \sim \frac{1}{2n}$.

c) En déduire $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, et estimer H_{1000} sachant $\gamma \approx 0{,}5772$.

Exercice 2 – Somme des inverses des racines

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

a) Par comparaison série-intégrale, montrer que $2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$, et en déduire $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

b) Montrer que $a_n = S_n - 2\sqrt{n}$ converge (étudier $a_{n+1} - a_n$).

c) Combien de termes faut-il pour que S_n dépasse 100 ?

Exercice 3 – Somme des logarithmes

Soit $L_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!)$.

a) À l'aide de la croissance de ln, montrer que $\int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t \leq L_n \leq \int_1^{n+1} \ln t \, \mathrm{d}t$.

b) En déduire $L_n = n\ln n - n + O(\ln n)$, puis $L_n \sim n \ln n$.

c) Comparer avec la formule de Stirling.

Exercice 4 – Restes des séries de Riemann

Soit $\alpha > 1$ et $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que $\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, et en déduire un équivalent de R_n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Application : combien de termes de $\sum \frac{1}{k^3}$ faut-il sommer pour approcher la somme à 10^{-6} près ?
c) Montrer que $\sum R_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 5 – Sommation des équivalents

Donner un équivalent simple des sommes suivantes quand $n \to +\infty$:

a) $A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{1}{k}$;
b) $B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$;
c) $C_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2+k}$ (calculer aussi la valeur exacte).

Exercice 6 – Sommes de puissances

Soit $\alpha > -1$ et $P_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$.

a) Montrer que $P_n \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (distinguer $\alpha \geq 0$ et $-1 < \alpha < 0$ pour la monotonie).
b) Vérifier sur $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ avec les formules exactes.
c) Que se passe-t-il pour $\alpha = -1$? pour $\alpha < -1$?

Exercice 7 – La constante de Stirling par les intégrales de Wallis

Soit $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$. On admet $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$, et que (W_n) est décroissante et positive.

a) Montrer que $(n+1) W_{n+1} W_n = \frac{\pi}{2}$, puis que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
b) Montrer que $W_{2n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$.
c) Sachant que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, en déduire $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 8 – Le sinus itéré

Soit $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = \sin u_n$. On admet que (u_n) décroît vers 0.

a) Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \to \frac{1}{3}$.
b) En déduire $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.
c) Nature de $\sum u_n$, de $\sum u_n^2$ et de $\sum u_n^3$.

Exercice 9 – Développement des sommes partielles de la série des inverses des carrés

On admet $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $R_n = \sum_{k>n} \frac{1}{k^2}$.

a) Montrer que $\frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{4k^4} + O\left(\frac{1}{k^6}\right)$.
b) En déduire $R_n = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, puis $R_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire un développement de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, et évaluer S_{10}.

Exercice 10 – Sommes d'une fonction croissante rapide

Soit $E_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\sqrt{k}}$.

a) Calculer $\int_0^x \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = u^2$).

b) Par comparaison série-intégrale, montrer que $E_n \sim 2\sqrt{n}\,\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$.

c) Le terme $\mathrm{e}^{\sqrt{n}}$ est-il négligeable devant E_n ? Et pour $\sum_{k \leq n} 2^k$?

Exercice 11 – Un produit et son équivalent

Soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.

a) Montrer que $\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} H_n + c_n$ où (c_n) converge.

b) Avec l'exercice sur $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$, montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $P_n \sim K \frac{\mathrm{e}^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

c) La série $\sum \frac{1}{P_n}$ converge-t-elle ?

Exercice 12 – Somme pondérée par des logarithmes

Soit $T_n = \sum_{k=1}^{n} k \ln k$.

a) Calculer $\int_1^x t \ln t\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $T_n = \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2}{4} + O(n \ln n)$.

c) En déduire $\ln\left(\prod_{k=1}^{n} k^k\right) \sim \frac{n^2 \ln n}{2}$.

Exercice 13 – Inverses des impairs et série harmonique alternée

a) Exprimer $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ à l'aide de H_{2n} et H_n, et en déduire $I_n = \frac{1}{2}\ln n + \ln 2 + \frac{\gamma}{2} + o(1)$.

b) Montrer que $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = H_{2n} - H_n$, et en déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$.

c) Calculer la somme de $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$ (deux impairs, un pair), en admettant qu'elle converge.

Exercice 14 – Reste de la série harmonique alternée

Soit $r_n = \sum_{k>n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \int_0^1 \frac{(-x)^n - (-x)^N}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire $r_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

c) En déduire $r_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}$ (voir l'intégrale $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ étudiée en plaquette 2), et comparer à la majoration du critère spécial.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : inverses de logarithmes et de nombres harmoniques

a) Par intégration par parties, montrer que $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} = \frac{x}{\ln x} + O(1) + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t}$, puis que $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} = o\left(\frac{x}{\ln x}\right)$ (couper en $\sqrt{x}$).

b) En déduire $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k} \sim \frac{n}{\ln n}$.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{H_k} \sim \frac{n}{\ln n}$.

d) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kH_k} \sim \ln\ln n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).