Plaquette 2 – Séries à termes positifs : comparaisons et développements asymptotiques

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour une série à termes **positifs** (ou de signe constant à partir d'un rang), on cherche un **équivalent** du terme général par développement limité, puis on compare à une série de **Riemann** ou de **Bertrand**. Quand le terme général est défini par une récurrence, une intégrale ou un produit, on obtient d'abord un **encadrement** ou une relation (télescopage, $u_n + u_{n+1}$, $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$). Les critères de d'Alembert et de Cauchy servent pour les factorielles et les puissances n-ièmes ; la **condensation** et le lien **suite-série** complètent l'arsenal.

Exercice 1 – Trois natures par développement limité

Déterminer la nature des séries de termes généraux ($n \geq 1$) :

a) $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$;

b) $b_n = n^{1/n} - 1$;

c) $c_n = 1 - \cos\frac{1}{n}$.

Exercice 2 – Autour de la limite de (1 + 1/n) puissance n

a) Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$.

b) En déduire la nature de $\sum\left(\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$.

c) Nature de $\sum v_n$ avec $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \mathrm{e}^{-n}$.

Exercice 3 – Nature selon un paramètre par développement

Pour $\alpha > 0$, on pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha} - \sin\frac{1}{n^\alpha}$.

a) Montrer que $u_n \geq 0$.

b) Donner un équivalent de u_n et discuter la nature de $\sum u_n$.

c) Même question pour $w_n = \sqrt[3]{n^3 + n^\alpha} - n$, avec $0 < \alpha < 3$.

Exercice 4 – Séries de Bertrand

Soit $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ pour $n \geq 2$.

a) Cas $\alpha = 1$: par comparaison série-intégrale, montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

b) Cas $\alpha > 1$: montrer la convergence pour tout β (comparer à $n^{-\gamma}$ avec $1 < \gamma < \alpha$).

c) Cas $\alpha < 1$: montrer la divergence pour tout β.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Factorielles et coefficients binomiaux

Déterminer la nature de $\sum a_n$ et de $\sum b_n$, avec

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad b_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$$

Exercice 6 – Puissances n carré

Déterminer la nature des séries de termes généraux :

a) $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

b) $v_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$;

c) $w_n = \left(1 - \frac{1}{n^{3/2}}\right)^{n^2}$.

Exercice 7 – Une suite récurrente et la série de ses carrés

Soit $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a) Montrer que (u_n) est décroissante, à valeurs dans $]0,1[$, de limite 0.

b) Montrer que $\sum u_n^2$ converge et calculer sa somme.

c) Montrer que $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \to 1$, puis que $u_n \sim \frac{1}{n}$. Nature de $\sum u_n$?

Exercice 8 – Terme général défini par une intégrale

Soit $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \geq 0$.

a) Montrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et en déduire la nature de $\sum u_n$.

b) Calculer $u_n + u_{n+1}$ et en déduire un équivalent de u_n.

c) Nature de $\sum u_n^2$ et de $\sum \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9 – Divergence de la série des rapports aux sommes partielles

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ diverge, et $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

a) Montrer que $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geq 1 - \frac{S_n}{S_m}$ pour $m > n$, et en déduire que $\sum \frac{a_n}{S_n}$ diverge.

b) Montrer que $\frac{a_n}{S_n^2} \leq \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$ pour $n \geq 2$, et en déduire que $\sum \frac{a_n}{S_n^2}$ converge.

c) Application : $a_n = 1$.

Exercice 10 – Condensation de Cauchy

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ décroissante et positive.

a) Montrer que $2^k u_{2^{k+1}} \leq \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} u_n \leq 2^k u_{2^k}$.

b) En déduire que $\sum u_n$ et $\sum 2^k u_{2^k}$ ont même nature.

c) Retrouver ainsi la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et de $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Lien suite-série et formule de Stirling

Soit $a_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n$ pour $n \geq 1$.

a) Montrer que $a_{n+1} - a_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

b) Montrer que $a_{n+1} - a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire que (a_n) converge.

c) En déduire l'existence de $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Exercice 12 – Séries de racines et de carrés

Soit (u_n) une suite positive telle que $\sum u_n$ converge.

a) Montrer que $\sum u_n^2$ converge. La réciproque est-elle vraie ?

b) Montrer que $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge (inégalité $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$).

c) La série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge-t-elle ?

Exercice 13 – Terme général décroissant d'une série convergente

Soit (u_n) positive, décroissante, avec $\sum u_n$ convergente, de restes $R_n = \sum_{k>n} u_k$.

a) Montrer que $n u_{2n} \leq R_n$, puis que $n u_n \to 0$.

b) Montrer par un exemple que la conclusion tombe sans l'hypothèse de décroissance.

c) Ce résultat permet-il de prouver la divergence de $\sum \frac{\ln n}{n}$? Celle de $\sum \frac{1}{n \ln n}$?

Exercice 14 – Différences de racines

a) Pour $\alpha > 0$, déterminer la nature de $\sum \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^\alpha$.

b) Déterminer la nature de $\sum \left(\sqrt{n^2 + n} - n - \frac{1}{2}\right)$.

c) Existe-t-il des réels a, b tels que $\sum \left(\sqrt{n^2 + n} - an - b\right)$ converge ?

Exercice 15 – Synthèse : produits infinis

Soit (u_n) une suite de réels positifs et $P_N = \prod_{n=1}^{N} (1 + u_n)$.

a) Montrer que (P_N) converge vers un réel si et seulement si $\sum u_n$ converge (utiliser $\frac{x}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ pour $0 \leq x \leq 1$).

b) Calculer $\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $\prod_{n=2}^{N} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, puis leurs limites.

c) Le produit $\prod \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ converge-t-il ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).