Plaquette 4 – Séries à termes quelconques, produit de Cauchy et familles sommables

Séries numériques — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Face à une série de signe variable : tester d'abord la **convergence absolue** ; sinon, si elle est **alternée**, vérifier les hypothèses du critère spécial (décroissance de $|u_n|$!) ; à défaut, faire un **développement asymptotique** $u_n = v_n + w_n$ avec $\sum v_n$ alternée convergente et w_n de signe constant, ou une **transformation d'Abel** quand les sommes partielles d'un facteur sont bornées. Pour les sommes doubles, on vérifie la **sommabilité** sur les valeurs absolues (théorème de Fubini positif), ce qui autorise ensuite toutes les **interversions** et tous les **regroupements**.

Exercice 1 – Séries de Riemann alternées

Selon $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$: convergence absolue, semi-convergence ou divergence.

Exercice 2 – Développements de termes alternés

Déterminer la nature des séries de termes généraux ($n \geq 2$) :

a) $u_n = \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$;

b) $v_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$;

c) $w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos\frac{1}{n}$.

Exercice 3 – Série alternée perturbée selon un paramètre

Pour $\alpha > 0$, soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ ($n \geq 2$).

a) Montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} - \dfrac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3\alpha}}\right)$.

b) En déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) Pour quelles valeurs la convergence est-elle absolue ?

Exercice 4 – Critère d'Abel et séries trigonométriques

Soit (a_n) une suite réelle décroissante de limite nulle, et (b_n) une suite complexe dont les sommes partielles $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ sont bornées par M.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{N} a_k b_k = a_N B_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

b) En déduire que $\sum a_n b_n$ converge.

c) Application : pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et $\alpha > 0$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une série semi-convergente : sinus de n sur n

a) Justifier que $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge.

b) Montrer que $|\sin n| \geq \sin^2 n = \frac{1-\cos(2n)}{2}$.

c) En déduire que $\sum \frac{|\sin n|}{n}$ diverge.

Exercice 6 – Calcul approché de l'inverse de e

On admet $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

a) Justifier, avec le critère spécial, que $\left|\frac{1}{\mathrm{e}} - S_N\right| \leq \frac{1}{(N+1)!}$ où $S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n!}$.

b) Quel N suffit pour une erreur $\leq 10^{-4}$? Calculer S_N.

c) Le signe de l'erreur est-il connu ?

Exercice 7 – Un produit de Cauchy divergent

Soit $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$, terme d'une série convergente, et $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$.

a) Montrer que $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$.

b) Montrer que $(k+1)(n-k+1) \leq \left(\frac{n+2}{2}\right)^2$, et en déduire $|c_n| \geq \frac{2(n+1)}{n+2}$.

c) Conclure. Quelle hypothèse du théorème du produit de Cauchy manque ?

Exercice 8 – Produit de Cauchy de séries géométriques

Soit $x \in]-1, 1[$.

a) Calculer le produit de Cauchy de $\sum x^n$ par elle-même, et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

b) Pour $x \neq y$ dans $]-1, 1[$, calculer de même $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}$.

c) Application numérique : $\sum_{n \geq 0} \frac{n+1}{3^n}$.

Exercice 9 – Une famille double sommable

Pour $\alpha > 0$, on considère la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.

a) En sommant par paquets $I_n = \{(p,q) \mid p+q = n\}$, montrer qu'elle est sommable si et seulement si $\alpha > 2$.

b) Pour $\alpha = 3$, exprimer sa somme à l'aide de $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2}$ et $\zeta(3) = \sum \frac{1}{n^3}$.

c) La famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)$ est-elle sommable ? Quelle est sa somme ?

Exercice 10 – Somme des zêta moins un

Pour $p \geq 2$, on note $\zeta(p) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que la famille $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n \geq 2,\, p \geq 2}$ est sommable en sommant d'abord sur p.

b) En déduire $\sum_{p \geq 2} (\zeta(p) - 1) = 1$.

c) Montrer de même que $\sum_{p \geq 1} (\zeta(2p) - 1) = \frac{3}{4}$.

Exercice 11 – Quand Fubini échoue

Soit $(u_{p,q})_{p,q \geq 1}$ définie par $u_{p,p} = 1$, $u_{p,p+1} = -1$, et $u_{p,q} = 0$ sinon.

a) Calculer $\sum_p \left(\sum_q u_{p,q}\right)$.

b) Calculer $\sum_q \left(\sum_p u_{p,q}\right)$.

c) Expliquer.

Exercice 12 – Série de Lambert et nombre de diviseurs

Soit $x \in]0,1[$ et $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

a) Montrer que la famille $\left(x^{nk}\right)_{n,k \geq 1}$ est sommable.

b) En regroupant selon la valeur de $m = nk$, montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{m \geq 1} d(m) x^m$.

c) Vérifier les premiers coefficients jusqu'à x^6.

Exercice 13 – Regroupement par paquets de signe constant

Soit $u_n = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ pour $n \geq 1$, et $b_k = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2 - 1} \frac{1}{n}$.

a) Montrer que si les sommes par paquets $\sum (-1)^k b_k$ convergent, alors $\sum u_n$ converge (les termes d'un paquet ont le même signe).

b) Montrer que $b_k = \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ à l'aide de $H_m = \ln m + \gamma + O\left(\frac{1}{m}\right)$.

c) Conclure.

Exercice 14 – Réarrangement d'une série absolument convergente

Soit $\sum u_n$ absolument convergente, de somme S, et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\sum_{n > N} |u_n| \leq \varepsilon$. Montrer qu'il existe M tel que $\{0, \dots, N\} \subset \sigma(\{0, \dots, M\})$.

b) Pour $m \geq M$, montrer que $\left| \sum_{k=0}^{m} u_{\sigma(k)} - \sum_{n=0}^{N} u_n \right| \leq \varepsilon$.

c) En déduire que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et a pour somme S. Que se passe-t-il pour une série semi-convergente ?

Exercice 15 – Synthèse : la fonction êta de Dirichlet

Pour $s > 0$, soit $\eta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$, et pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$.

a) Justifier que $\eta(s)$ est bien défini pour $s > 0$, et que $1 - 2^{-s} \leq \eta(s) \leq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $s > 1$, en séparant les termes pairs et impairs (justifier), montrer que $\eta(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right)\zeta(s)$.

c) Sachant $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, en déduire $\eta(2)$ et $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

d) Combien de termes faut-il pour obtenir $\eta(2)$ à 10^{-4} près ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).