Plaquette 4 – Séries dans un espace de Banach : complétude, séries de Neumann et applications

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critère de Cauchy. Dans E complet, $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall q > p \geq N,\ \left\| \sum_{n=p+1}^{q} u_n \right\| \leq \varepsilon$.

Complétude. E est complet $\Leftrightarrow$ toute série absolument convergente de E converge. Sont complets : les espaces de dimension finie, $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, $L(E)$ si E l'est.

Série de Neumann. Si $T \in L(E)$, E complet, et $\sum \|T^k\| < +\infty$, alors $I - T$ est inversible et

$$(I-T)^{-1} = \sum_{k \geq 0} T^k$$

Rayon spectral. Pour une norme d'algèbre, $|\lambda| \leq \|A\|$ pour toute valeur propre λ de A.

Correction de l'exercice 1 – Convergence absolue dans un espace complet

a) Pour $q > p$:

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{n=p+1}^{q} u_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^{q} \|u_n\| \leq \sum_{n>p} \|u_n\|$$

reste d'une série numérique convergente, qui tend vers 0 quand $p \to +\infty$.

b) E étant complet, (S_n) converge. Par continuité de la norme, $\|S_n\| \leq \sum_{k \leq n} \|u_k\|$ donne l'inégalité à la limite.

c) En dimension finie, convergence = convergence de chaque coordonnée : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ (critère spécial) et $\sum \frac{1}{n^2}$ convergent. Mais $\|u_n\|_\infty \geq \frac{1}{n}$: pas de convergence absolue (pour toute norme, toutes étant équivalentes).

Réponse. Sommes partielles de Cauchy, donc convergentes dans un espace complet ; dans l'exemple : convergence non absolue.

Correction de l'exercice 2 – Réciproque : un critère de complétude

a) Pour chaque k, il existe N_k tel que $\|x_p - x_q\| \leq 2^{-k}$ pour $p, q \geq N_k$. On pose $\varphi(0) = N_0$ et $\varphi(k+1) = \max(N_{k+1}, \varphi(k)+1)$; alors $\varphi(k), \varphi(k+1) \geq N_k$.

b) La série $\sum (x_{\varphi(k+1)} - x_{\varphi(k)})$ est absolument convergente ($\sum 2^{-k} < \infty$), donc converge ; ses sommes partielles valent

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(x_{\varphi(j+1)} - x_{\varphi(j)} \right) = x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(0)}$$

donc $(x_{\varphi(k)})$ converge vers un ℓ.

c) Une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers elle : $\|x_n - \ell\| \leq \|x_n - x_{\varphi(k)}\| + \|x_{\varphi(k)} - \ell\|$, les deux termes étant petits pour n et k grands.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Une sous-suite à sauts $\leq 2^{-k}$ converge (série télescopique absolument convergente), donc la suite de Cauchy converge.

Correction de l'exercice 3 – Séries de fonctions continues pour la norme uniforme

a) $\left\| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right\|_\infty \leq \frac{1}{n^2}$: la série converge absolument dans l'espace complet $(C([0,2\pi]), \|\cdot\|_\infty)$, donc converge vers une fonction continue (convergence normale).

b) Par l'inégalité triangulaire à la limite :

$$\|f - S_N\|_\infty \leq \sum_{n>N} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N}$$

(comparaison série-intégrale).

c) $\frac{1}{N} \leq 10^{-2}$ pour $N \geq 100$: cent termes suffisent.

Réponse. Convergence normale dans un espace complet : f continue, $\|f - S_N\|_\infty \leq \frac{1}{N}$; $N = 100$.

Correction de l'exercice 4 – Un espace non complet

a) $g_{2N} - g_N$ est nulle hors de $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{N}, \frac{1}{2} + \frac{1}{N}\right]$, impaire par rapport à $\frac{1}{2}$; avec $u = x - \frac{1}{2} \geq 0$, elle vaut Nu sur $\left[0, \frac{1}{2N}\right]$ et $1 - Nu$ sur $\left[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}\right]$:

$$\|g_{2N} - g_N\|_1 = 2\left(\int_0^{\frac{1}{2N}} Nu \, du + \int_{\frac{1}{2N}}^{\frac{1}{N}} (1 - Nu)\, du \right) = 2\left(\frac{1}{8N} + \frac{1}{8N}\right) = \frac{1}{2N}$$

b) Le terme d'indice n a pour norme 2^{-n-1}, série géométrique convergente.

c) Les sommes partielles valent $g_{2^{n+1}} - g_1$. Si $g_{2^n} \to h$ continue en norme 1, alors pour $0 < a < \frac{1}{2}$, sur $\left[\frac{1}{2} + a, 1\right]$, $g_{2^n} = 1$ dès que $2^n a \geq 1$, d'où $\int_{1/2+a}^1 |1 - h| = 0$ et $h = 1$ sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$; de même $h = -1$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$: h n'est pas continue en $\frac{1}{2}$. Contradiction : l'espace n'est pas complet.

Réponse. Série absolument convergente ($\sum 2^{-n-1}$) sans limite continue : $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet.

Correction de l'exercice 5 – Point fixe d'une contraction par une série

a) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$, terme d'une série géométrique convergente. E étant complet, $x_n = x_0 + \sum_{j<n} (x_{j+1} - x_j)$ converge vers ℓ, qui est dans F (fermé). Par continuité de f, $\ell = f(\ell)$.

b) Si $f(m) = m$, $\|\ell - m\| = \|f(\ell) - f(m)\| \leq k\|\ell - m\|$, d'où $\ell = m$. Et

$$\|x_n - \ell\| \leq \sum_{j \geq n} \|x_{j+1} - x_j\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\|$$

c) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\cos x$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (complet). $x_1 = 1 + \frac{1}{2}\cos 1 \approx 1{,}270$, donc l'erreur est $\leq 2 \cdot 0{,}270 \cdot 2^{-n} \leq 10^{-6}$ dès que $2^n \geq 5{,}4 \times 10^5$, soit $n \geq 20$.

Réponse. Série télescopique géométrique : point fixe unique, erreur $\leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$; 20 itérations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Résolvante d’une matrice

a) $\lambda I - A = \lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$ avec $\left\|\frac{A}{\lambda}\right\| < 1$: série de Neumann, et

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{\lambda^k} = \sum_{k\geq 0}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

b) Si $|\lambda| > \|A\|$, $\lambda I - A$ est inversible, donc λ n’est pas valeur propre.

c) $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \sum_k \frac{\|A\|^k}{|\lambda|^{k+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \to 0$.

Réponse. $(\lambda I - A)^{-1} = \sum \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$ pour $|\lambda| > \|A\|$; spectre dans le disque de rayon $\|A\|$.

Correction de l’exercice 7 – Rayon spectral et normes

a) Si $\lambda \in \mathrm{Sp}A$, alors $\lambda^k \in \mathrm{Sp}A^k$, et l’exercice précédent appliqué à A^k donne $|\lambda|^k \leq \|A^k\|$.

b) $\rho(A) = 0$ et $\|A\|_\infty = 1$; mais $A^k = 0$ pour $k \geq 2$, donc $\|A^k\|^{1/k} = 0 = \rho(A)$ pour $k \geq 2$: la norme surestime ρ, mais les racines k-ièmes des normes des puissances s’en approchent (formule de Gelfand).

c) $B = \frac{1}{2}I + 10N$ avec $N^2 = 0$, donc $B^k = 2^{-k}I + 10k2^{1-k}N$, et

$$\sum_k \|B^k\| \leq \sum_k \left(2^{-k} + 20k2^{-k}\right) < +\infty$$

bien que $\|B\|_\infty = 10{,}5$. Ce qui compte est $\rho(B) = \frac{1}{2} < 1$.

Réponse. $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$; nilpotente : $\rho = 0 < 1 = \|A\|$; $\sum B^k$ converge car $\rho(B) = \frac{1}{2}$.

Correction de l’exercice 8 – Logarithme de I − tA par une série

a) Sur $|t| \leq r < \frac{1}{\|A\|}$, la série dérivée $\sum t^{k-1}A^k$ converge normalement, d’où

$$F'(t) = \sum_{k\geq 1} t^{k-1}A^k = A\sum_{j\geq 0}(tA)^j = A(I - tA)^{-1}$$

b) M et H commutent (polynômes en A, ou limites de tels polynômes) : $\exp(M+H) = \exp(M)\exp(H)$ et $\exp(H) = I + H + O(\|H\|^2)$. Avec $M = F(t)$, $H = F(t+h) - F(t) = hF'(t) + o(h)$, on obtient la dérivée $\exp(F(t))F'(t) = F'(t)\exp(F(t))$.

c) $G(t) = (I - tA)\exp(F(t))$ vérifie $G' = -A\exp(F) + (I - tA)A(I - tA)^{-1}\exp(F) = 0$ (tout commute) et $G(0) = I$. Donc $\exp(F(t)) = (I - tA)^{-1}$: on retrouve $\exp(-\ln(1-x)) = \frac{1}{1-x}$.

Réponse. $F' = A(I - tA)^{-1}$ et $\exp(F(t)) = (I - tA)^{-1}$.

Correction de l’exercice 9 – Produit de Cauchy et exponentielle

a) La famille $(a_p b_q)_{p,q}$ vérifie $\sum_{p,q}\|a_p b_q\| \leq \left(\sum\|a_p\|\right)\left(\sum\|b_q\|\right) < \infty$: elle est sommable dans l’espace complet $M_n(\mathrm{K})$, et la somme par paquets $p + q = n$ (produit de Cauchy) égale la somme « par lignes » $\sum_p a_p \sum_q b_q$.

b) Avec $a_p = \frac{A^p}{p!}$, $b_q = \frac{B^q}{q!}$:

$$c_n = \sum_{p+q=n}\frac{A^pB^q}{p!\,q!} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}A^pB^{n-p} = \frac{(A+B)^n}{n!}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Dans la formule du binôme $(A+B)^n = \sum \binom{n}{p} A^p B^{n-p}$, qui exige la commutation.

Réponse. Famille $(a_p b_q)$ sommable : produit de Cauchy ; binôme (commutation) : $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

Correction de l'exercice 10 – Série de Neumann d'un opérateur intégral

a) Par récurrence : $|(T^{n+1}f)(x)| \le \int_0^x \frac{t^n}{n!}\|f\|_\infty \,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\|f\|_\infty$. Sur $[0,1]$, $\|T^n f\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{n!}$.

b) $\sum \|T^n\| \le \mathrm{e} < \infty$ et E est complet : la série de Neumann converge dans $L(E)$ vers $(I-T)^{-1}$, car $(I-T)\sum_{n\le N} T^n = I - T^{N+1} \to I$.

c) $T^n 1 = \frac{x^n}{n!}$, donc

$$f(x) = \sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

Vérification : $\mathrm{e}^x - \int_0^x \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x - 1) = 1$ ✓. (C'est l'équation $f' = f$, $f(0) = 1$, sous forme intégrale.)

Réponse. $\|T^n\| \le \frac{1}{n!}$: $I - T$ inversible, $f = \sum T^n g$; pour $g = 1$, $f = \mathrm{e}^x$.

Correction de l'exercice 11 – Une équation intégrale de Fredholm

a) $|(Tf)(x)| \le |\lambda|\|f\|_\infty$, avec égalité pour $f = 1$: $\|T\| = |\lambda| < 1$.

b) Série de Neumann : $f = \sum_n T^n g$ est l'unique solution de $f - Tf = g$. $Tg = \frac{\lambda}{2}$ (constante), puis $T^n g = \frac{\lambda^n}{2}$ pour $n \ge 1$.

c) Donc

$$f(x) = x + \sum_{n\ge 1} \frac{\lambda^n}{2} = x + \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$$

Directement : $f = x + \lambda c$, puis $c = \int_0^1 f = \frac{1}{2} + \lambda c$, soit $c = \frac{1}{2(1-\lambda)}$ ✓. Pour $\lambda = 1$, l'équation n'a pas de solution ($c = \frac{1}{2} + c$).

Réponse. $f(x) = x + \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$ (série de Neumann, $\|T\| = |\lambda| < 1$).

Correction de l'exercice 12 – Sinus et cosinus d'une matrice

a) Convergence absolue (majoration par $\mathrm{ch}\|A\|$, $\mathrm{sh}\|A\|$). On sépare les termes pairs et impairs de $\exp(\pm iA)$, licite par convergence absolue.

b) iA et $-iA$ commutent : $\exp(iA)\exp(-iA) = I$. Alors

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \frac{(\mathrm{e}^{iA} + \mathrm{e}^{-iA})^2 - (\mathrm{e}^{iA} - \mathrm{e}^{-iA})^2}{4} = \mathrm{e}^{iA}\mathrm{e}^{-iA} = I$$

c) Pour $A^2 = 0$: $\cos A = I$, $\sin A = A$. Pour $A = \frac{\pi}{2} I + N$:
$\exp(\pm iA) = \mathrm{e}^{\pm i\pi/2}(I \pm iN) = \pm i(I \pm iN)$, d'où $\cos A = \frac{i(I+iN) - i(I-iN)}{2} = -N$ et $\sin A = \frac{i(I+iN) + i(I-iN)}{2i} = I$. Contrôle : $\cos^2 A + \sin^2 A = N^2 + I = I$ ✓.

Réponse. $\cos A = \frac{\mathrm{e}^{iA} + \mathrm{e}^{-iA}}{2}$, $\cos^2 A + \sin^2 A = I$; pour $\frac{\pi}{2} I + N$: $\cos A = -N$, $\sin A = I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Suites récurrentes affines de vecteurs

a) Récurrence immédiate.

b) $\sum \|A^k\| < \infty$ impose $A^k \to 0$, donc $A^k X_0 \to 0$, et $\sum_j A^j B \to (I-A)^{-1}B$ (série de Neumann).

c) $I - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'inverse $4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc

$$\lim X_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contrôle : $A(3,2) + (1,1) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1, 1 + 1\right) = (3,2)$ ✓ (point fixe).

Réponse. $X_k \to (I-A)^{-1}B$; dans l'exemple, la limite est $(3,2)$.

Correction de l'exercice 14 – Équivalence des normes et convergence absolue

a) Il existe $\alpha, \beta > 0$ avec $\alpha N_1 \le N_2 \le \beta N_1$: les séries $\sum N_1(u_n)$ et $\sum N_2(u_n)$ sont de même nature par comparaison.

b) Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée ; il existe β avec $\max_{i,j} |m_{ij}| \le \beta \|M\|$. Alors

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\|_\infty \le \beta \frac{\|A\|^k}{k!}$$

terme d'une série convergente. On peut aussi raisonner directement par a).

c) $u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, 0\right)$: convergence par le critère spécial, mais $\|u_n\| = \frac{1}{n}$.

Réponse. En dimension finie, la convergence absolue ne dépend pas de la norme ; $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n}, 0\right)$ converge sans convergence absolue.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : logarithme au voisinage de l'identité

a) $L(tH)$ est un polynôme en H (limite de tels), dérivable de dérivée $\sum_{k \ge 1} (-1)^{k+1} t^{k-1} H^k = H(I+tH)^{-1}$. Comme précédemment, $G(t) = (I+tH)^{-1}\exp(L(tH))$ vérifie

$$G'(t) = -H(I+tH)^{-2}\exp(L(tH)) + (I+tH)^{-1}H(I+tH)^{-1}\exp(L(tH)) = 0$$

(tout commute) et $G(0) = I$, d'où $\exp(L(tH)) = I + tH$.

b) Si $\|M - I\| < 1$, $M = \exp(L(M-I))$.

c) $\det \exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} > 0$, donc le sous-groupe engendré est inclus dans $GL_n^+(\mathbb{R})$; il contient la boule $B(I,1) \cap GL_n^+$ par b), donc il est égal à $GL_n^+(\mathbb{R})$.

d) Non : $\mathrm{diag}(-1,-2) \in GL_2^+(\mathbb{R})$ n'est l'exponentielle d'aucune matrice réelle (ses valeurs propres négatives distinctes ne peuvent provenir de valeurs propres conjuguées). Les exponentielles engendrent GL_n^+ sans le recouvrir.

Réponse. $\exp(L(H)) = I + H$: $B(I,1) \subset \exp(M_n)$; les exponentielles engendrent $GL_n^+(\mathbb{R})$ sans le recouvrir.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).