Plaquette 2 – Calculs d'exponentielles et de séries de matrices

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Polynôme annulateur de degré 2. Si $(A-\lambda I)(A-\mu I)=0$ avec $\lambda\neq\mu$ (interpolation de Lagrange) :

$$\exp(tA)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\mu I)-\mathrm{e}^{\mu t}(A-\lambda I)}{\lambda-\mu}$$

Cas particuliers. $P^2=P$: $\exp(tP)=I+(\mathrm{e}^t-1)P$. $S^2=I$: $\exp(tS)=\operatorname{ch}t\,I+\operatorname{sh}t\,S$. $J^2=-I$: $\exp(tJ)=\cos t\,I+\sin t\,J$.

Partie nilpotente. $\exp(t(\lambda I+N))=\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{k<p}\frac{t^kN^k}{k!}$ si $N^p=0$.

Série géométrique. $\sum A^k$ converge si et seulement si toutes les valeurs propres de A sont de module <1 ; sa somme est alors $(I-A)^{-1}$.

Correction de l'exercice 1 – Exponentielle d'un projecteur

a) $P^k=P$ pour $k\geq 1$, donc

$$\exp(tP)=I+\sum_{k\geq 1}\frac{t^k}{k!}P=I+(\mathrm{e}^t-1)P$$

b) $P^2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=P$ ✓, et $\exp(P)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}&\mathrm{e}-1\\0&1\end{pmatrix}$, de déterminant $\mathrm{e}=\mathrm{e}^{\operatorname{tr}P}$ ✓.

c) $\operatorname{tr}P=\operatorname{rg}P=r$, donc $\det\exp(tP)=\mathrm{e}^{rt}$: dans une base adaptée, $\exp(tP)=\operatorname{diag}(\mathrm{e}^t,\dots,\mathrm{e}^t,1,\dots,1)$ avec r fois e^t.

Réponse. $\exp(tP)=I+(\mathrm{e}^t-1)P$; $\det\exp(tP)=\mathrm{e}^{t\operatorname{rg}P}$.

Correction de l'exercice 2 – Exponentielle d'une symétrie

a) $S^2=\begin{pmatrix}1&2-2\\0&1\end{pmatrix}=I$. Les puissances paires valent I, les impaires S :

$$\exp(tS)=\left(\sum_p\frac{t^{2p}}{(2p)!}\right)I+\left(\sum_p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)S=\operatorname{ch}t\,I+\operatorname{sh}t\,S$$

b) $\exp(S)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}1+\operatorname{sh}1&2\operatorname{sh}1\\0&\operatorname{ch}1-\operatorname{sh}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}&2\operatorname{sh}1\\0&\mathrm{e}^{-1}\end{pmatrix}$: diagonale e^1, e^{-1}, conforme aux valeurs propres ±1 de S.

c) $\operatorname{ch}t\,I+\operatorname{sh}t\,S=\mathrm{e}^t\frac{I+S}{2}+\mathrm{e}^{-t}\frac{I-S}{2}$: on dilate de e^t sur l'espace propre de 1 et de e^{-t} sur celui de -1.

Réponse. $\exp(tS)=\operatorname{ch}t\,I+\operatorname{sh}t\,S$; $\exp(S)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}&2\operatorname{sh}1\\0&\mathrm{e}^{-1}\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Diagonalisation et exponentielle

a) $\chi_A=(X-1)^2-4=(X-3)(X+1)$, avec $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ pour 3 et $v=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ pour -1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\exp(tA) = \mathrm{e}^{3t}uu^{\mathsf{T}} + \mathrm{e}^{-t}vv^{\mathsf{T}}$, soit

$$\exp(tA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$$

Contrôle : $t=0$ donne I, et $\det = \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t})^2 - (\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t})^2\right) = \mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{t\operatorname{tr}A}$ ✓.

c) $X(t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}, \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t}\right) \sim \frac{\mathrm{e}^{3t}}{2}(1,1)$: la solution s'aligne sur la direction propre de la plus grande valeur propre.

Réponse. $\exp(tA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – Similitudes directes

a) aI et bJ commutent, donc $\exp(A) = \exp(aI)\exp(bJ) = \mathrm{e}^{a}\exp(bJ)$, et $J^2 = -I$ donne

$$\exp(bJ) = \cos b\, I + \sin b\, J = \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$$

b) $\exp(A) = \mathrm{e}J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{e} \\ \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix}$: similitude de rapport e et d'angle $\frac{\pi}{2}$. C'est l'analogue de $\mathrm{e}^{1+i\pi/2} = i\mathrm{e}$.

c) $\mathrm{e}^{a}(\cos b\, I + \sin b\, J) = -I$ impose $\mathrm{e}^{a}\cos b = -1$ et $\sin b = 0$, donc $\cos b = -1$, $a = 0$: $A = (2k+1)\pi J$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réponse. $\exp(aI+bJ) = \mathrm{e}^{a}R_b$; $\exp(I + \frac{\pi}{2}J) = \mathrm{e}J$; $\exp = -I$ pour $A = (2k+1)\pi J$.

Correction de l'exercice 5 – Interpolation de Lagrange

a) La division euclidienne $X^k = Q(X)(X-\lambda)(X-\mu) + R(X)$ avec $\deg R \le 1$ donne $A^k = R(A)$, et R est le polynôme d'interpolation de X^k en λ, μ :

$$R(X) = \lambda^k \frac{X-\mu}{\lambda-\mu} + \mu^k \frac{X-\lambda}{\mu-\lambda}$$

b) On somme $\frac{t^k}{k!}A^k$: $\exp(tA) = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\mu I) - \mathrm{e}^{\mu t}(A-\lambda I)}{\lambda-\mu}$.

c) $\chi_A = (X-3)(X-1)$: $\exp(tA) = \dfrac{\mathrm{e}^{3t}(A-I) - \mathrm{e}^{t}(A-3I)}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t} \\ \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$.

Réponse. $\exp(tA) = \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda t}(A-\mu I) - \mathrm{e}^{\mu t}(A-\lambda I)}{\lambda-\mu}$; pour l'exemple, coefficients $\dfrac{\mathrm{e}^{3t} \pm \mathrm{e}^{t}}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Bloc de Jordan de taille trois

a) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = E_{13}$, $N^3 = 0$, et I commute avec N :

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^{t}\left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X(t) = \exp(tA)X(0)$ est la dernière colonne : $X(t) = \mathrm{e}^{t}\left(\frac{t^2}{2}, t, 1\right)$. Vérification sur la première composante : $x_1' = \mathrm{e}^{t}\left(\frac{t^2}{2}+t\right) = x_1 + x_2$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\det\exp(tA) = \mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{t\operatorname{tr}A}$ ✓.

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}1 & t & t^2/2\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $X(t) = \mathrm{e}^{t}(\frac{t^2}{2}, t, 1)$.

Correction de l’exercice 7 – Matrice triangulaire à valeurs propres distinctes

a) $\lambda = 1$, $\mu = 2$: $\exp(A) = \mathrm{e}^{2}(A - I) - \mathrm{e}(A - 2I)$, avec $A - I = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $A - 2I = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$:

$$\exp(A) = \begin{pmatrix}\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\\ 0 & \mathrm{e}^2\end{pmatrix}$$

b) Vecteurs propres $(1,0)$ pour 1 et $(1,1)$ pour 2 : $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, et $P\operatorname{diag}(\mathrm{e}, \mathrm{e}^2)P^{-1} = \begin{pmatrix}\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\\ 0 & \mathrm{e}^2\end{pmatrix}$ ✓.

c) L’exponentielle ne se calcule pas coefficient par coefficient : les puissances A^k ont pour coefficient $(1,2)$ la valeur $2^k - 1$, d’où $\sum \frac{2^k - 1}{k!} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}$.

Réponse. $\exp(A) = \begin{pmatrix}\mathrm{e} & \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\\ 0 & \mathrm{e}^2\end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 8 – Inverse par série de Neumann finie

a) $N = \begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = abE_{13}$ et $N^3 = 0$. Alors $(I - N)(I + N + N^2) = I - N^3 = I$.

b) On obtient

$$M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & a & ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

c) $(I - N)\sum_{k=0}^{p-1} N^k = I - N^p = I$: la série géométrique $\sum N^k$ est **finie** et donne l’inverse, sans condition de norme.

Réponse. $M^{-1} = \begin{pmatrix}1 & a & ab\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; $(I - N)^{-1} = \sum_{k<p} N^k$.

Correction de l’exercice 9 – Série dérivée de la série géométrique

a) $\|kA^{k-1}\| \le k\|A\|^{k-1}$, terme d’une série numérique convergente (d’Alembert, rapport $\to \|A\| < 1$).

b) Les deux séries convergent absolument et A commute avec elle-même, donc le produit de Cauchy s’applique dans l’algèbre $M_n(\mathrm{K})$:

$$\left(\sum_{k\ge 0} A^k\right)^2 = \sum_{n\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{n} A^k A^{n-k}\right) = \sum_{n\ge 0}(n+1)A^n = (I - A)^{-2}$$

c) $\sum kA^{k-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{(1/2)^2}, \frac{1}{(2/3)^2}\right) = \operatorname{diag}\left(4, \frac{9}{4}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\sum_{k\ge 1} kA^{k-1} = (I-A)^{-2}$; ici $\operatorname{diag}(4, \frac{9}{4})$.

Correction de l'exercice 10 – Convergence sans condition de norme

a) $\|A\|_\infty = \max\left(\frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} > 1$: le critère ne s'applique pas.

b) $A = \frac{1}{2}I + N$, $N^2 = 0$, d'où par le binôme

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & k2^{1-k} \\ 0 & 2^{-k} \end{pmatrix}$$

et $\sum 2^{-k}$, $\sum k2^{1-k}$ convergent : $\sum A^k$ converge (coefficient par coefficient, en dimension finie).

c) $\sum_k 2^{-k} = 2$ et $\sum_k k2^{1-k} = 2 \cdot \frac{1/2}{(1/2)^2} = 4$: la somme vaut $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Et $I - A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ a pour inverse $4\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ✓. Le bon critère porte sur les valeurs propres ($\frac{1}{2}$), pas sur une norme.

Réponse. $\|A\|_\infty = \frac{3}{2}$, pourtant $\sum A^k = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (I-A)^{-1}$.

Correction de l'exercice 11 – Exponentielle et commutation

a) $BA^k = A^k B$ pour tout k, et la multiplication par B est linéaire continue : on passe à la limite dans les sommes partielles.

b) A et $-A$ commutent : $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = I$. Par récurrence, $\exp((k+1)A) = \exp(kA)\exp(A)$; et $\exp(-kA) = \exp(kA)^{-1}$.

c) $\exp(tA) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + O(t^3)$, donc

$$\exp(tA)\exp(tB) = I + t(A+B) + t^2\left(\frac{A^2+B^2}{2} + AB\right) + O(t^3)$$

et de même avec BA dans l'autre ordre. L'égalité pour tout t impose, par unicité du développement, $AB = BA$.

Réponse. $\exp(A)$ commute avec B ; $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$; le terme en t^2 force $AB = BA$.

Correction de l'exercice 12 – Exponentielle d'une matrice antisymétrique

a) $\exp(A)^{\mathsf{T}} = \exp(A^{\mathsf{T}}) = \exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ (la transposition est linéaire continue et $(A^k)^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^k$), et $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}A} = \mathrm{e}^0 = 1$.

b) A agit comme J sur le plan (e_1, e_2) et par 0 sur e_3 : $\exp(\theta A) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, rotation d'axe e_3 et d'angle θ.

c) $A_u^2 x = u \wedge (u \wedge x) = \langle u, x\rangle u - x$, puis $A_u^3 x = u \wedge (\langle u, x\rangle u - x) = -u \wedge x$. Donc $A_u^{2p+1} = (-1)^p A_u$ et $A_u^{2p} = (-1)^{p-1} A_u^2$ ($p \ge 1$), d'où

$$\exp(\theta A_u) = I + \sin\theta\, A_u + (1-\cos\theta) A_u^2$$

(formule de Rodrigues de la rotation d'axe u et d'angle θ).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\exp(\text{antisymétrique}) \in SO(n)$; $\exp(\theta A_u) = I + \sin\theta\, A_u + (1-\cos\theta)A_u^2$ (Rodrigues).

Correction de l'exercice 13 – Exponentielle égale à l'identité

a) $\exp(2\pi J) = \cos(2\pi)I + \sin(2\pi)J = I$; et $\exp(0) = I$ aussi.

b) $U = I + \frac{N}{2} + \cdots$ est I plus une nilpotente (qui commute avec I), donc inversible (série de Neumann finie). De $NU = 0$ on tire

$$N = NUU^{-1} = 0$$

c) $A = P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ et $\exp(A) = P\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i})P^{-1}$, égale à I si et seulement si $\mathrm{e}^{\lambda_i} = 1$ pour tout i, soit $\lambda_i \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Réponse. $\exp(2\pi J) = I$; pour N nilpotente, $\exp N = I \Rightarrow N = 0$; diagonalisable : $\exp A = I \Leftrightarrow \mathrm{Sp}A \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 14 – Une série voisine de l'exponentielle

a) $\left\| \frac{A^k}{(k+1)!} \right\| \le \frac{\|A\|^k}{(k+1)!}$, série convergente. Puis

$$A\Phi(A) = \sum_{k \ge 0} \frac{A^{k+1}}{(k+1)!} = \exp(A) - I$$

b) $\Phi(A) = A^{-1}(\exp(A) - I)$ (et $\Phi(A)$ commute avec A).

c) $\Phi(\mathrm{diag}(1,2)) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}-1, \frac{\mathrm{e}^2-1}{2}\right)$. Pour $N^2 = 0$: $\Phi(N) = I + \frac{N}{2}$, alors que N n'est pas inversible. C'est l'analogue de $\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$, prolongée par 1 en 0 ; on a aussi $\Phi(A) = \int_0^1 \exp(sA)\,\mathrm{d}s$.

Réponse. $A\Phi(A) = \exp(A) - I$; $\Phi(\mathrm{diag}(1,2)) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}-1, \frac{\mathrm{e}^2-1}{2})$; $\Phi(N) = I + \frac{N}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la matrice remplie de uns moins l'identité

a) Chaque coefficient de U^2 vaut $1+1+1 = 3$. Donc $U^k = 3^{k-1}U$ pour $k \ge 1$, et

$$\exp(tU) = I + \sum_{k \ge 1} \frac{t^k 3^{k-1}}{k!} U = I + \frac{\mathrm{e}^{3t} - 1}{3} U$$

b) U et $-I$ commutent : $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}\exp(tU) = \mathrm{e}^{-t}I + \frac{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t}}{3}U$.

c) Binôme (commutation) : $A^k = (-1)^k I + \sum_{j \ge 1} \binom{k}{j} 3^{j-1}(-1)^{k-j} U = (-1)^k I + \frac{2^k - (-1)^k}{3} U$.

Contrôle : $k = 1$ donne $-I + U$ ✓.

d) $X(t) = \exp(tA)e_1 = \mathrm{e}^{-t}e_1 + \frac{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t}}{3}(1,1,1)$, donc $\mathrm{e}^{-2t}X(t) \to \frac{1}{3}(1,1,1)$: la direction propre de la valeur propre 2 l'emporte.

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}I + \frac{\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-t}}{3}U$; $A^k = (-1)^k I + \frac{2^k - (-1)^k}{3}U$; $\mathrm{e}^{-2t}X \to \frac{1}{3}(1,1,1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).