Plaquette 3 – Exponentielle de matrices : dérivation et systèmes différentiels

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivation. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA) = \exp(tA)A$ (série dérivée normalement convergente sur tout segment).

Systèmes linéaires à coefficients constants.

$$X' = AX + B(t),\ X(0) = X_0 \Leftrightarrow X(t) = \exp(tA)X_0 + \int_0^t \exp((t-s)A)B(s)\,\mathrm{d}s$$

Comportement asymptotique. Si A est diagonalisable (sur $\mathbb{C}$) de valeurs propres λ_j, les solutions sont des combinaisons de $\mathrm{e}^{\lambda_j t}$: toutes tendent vers 0 si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$ pour tout j.

Équation scalaire d'ordre 2. $y'' + ay' + by = 0$ équivaut à $X' = CX$ avec $X = (y, y')$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 1 – Dérivée de l'exponentielle

a) Pour $k \geq 1$, $f_k'(t) = \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}$ et, avec une norme d'algèbre,

$$\sup_{|t| \leq a} \|f_k'(t)\| \leq \frac{a^{k-1}\|A\|^k}{(k-1)!}$$

terme d'une série convergente (de somme $\|A\|\mathrm{e}^{a\|A\|}$).

b) $\sum f_k$ converge simplement (vers $\exp(tA)$), chaque f_k est C^1, et $\sum f_k'$ converge uniformément sur tout segment : par le théorème de dérivation terme à terme, $\exp(tA)$ est C^1 et sa dérivée vaut $\sum_{k\geq 1}\frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = A\exp(tA)$.

c) A commute avec chaque A^k, donc avec la somme. Par récurrence, la dérivée n-ième vaut $A^n\exp(tA)$.

Réponse. Convergence normale de la série dérivée : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = A\exp(tA)$, et $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\exp(tA) = A^n\exp(tA)$.

Correction de l'exercice 2 – Unicité de la solution d'un système linéaire

a) Par dérivation d'un produit (bilinéaire continu) :

$$Y'(t) = -A\exp(-tA)X(t) + \exp(-tA)AX(t) = 0$$

car A et $\exp(-tA)$ commutent.

b) Y est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à $Y(0) = X_0$: $\exp(-tA)X(t) = X_0$. En multipliant à gauche par $\exp(tA)$ et en utilisant c), $X(t) = \exp(tA)X_0$; réciproquement cette fonction est solution (dérivée de l'exponentielle).

c) $M(t) = \exp(tA)\exp(-tA)$ a pour dérivée $A\exp(tA)\exp(-tA) - \exp(tA)A\exp(-tA) = 0$ et vaut I en 0 : $M(t) = I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $(\exp(-tA)X)' = 0$: $X(t) = \exp(tA)X_0$ est l'unique solution ; et $\exp(tA)^{-1} = \exp(-tA)$.

Correction de l'exercice 3 – Groupes à un paramètre

a) On dérive $s \mapsto \varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s)$ en $s = 0$:

$$\varphi'(t) = \varphi(t)\varphi'(0) = \varphi(t)A$$

b) $\psi(t) = \varphi(t)\exp(-tA)$ vérifie $\psi' = \varphi A\exp(-tA) - \varphi A\exp(-tA) = 0$ (car A commute avec $\exp(-tA)$), et $\psi(0) = I$. Donc $\varphi(t) = \exp(tA)$.

c) $A = \varphi'(0) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\cos\omega t & -\sin\omega t\\ \sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}_{t=0} = \omega J$, et l'on retrouve $\exp(t\omega J) = R_{\omega t}$.

Réponse. $\varphi' = \varphi\varphi'(0)$, donc $\varphi(t) = \exp(t\varphi'(0))$; rotations : générateur ωJ.

Correction de l'exercice 4 – Système à valeurs propres imaginaires

a) $A^2 = \begin{pmatrix}1-2 & -2+2\\ 1-1 & -2+1\end{pmatrix} = -I$, donc comme pour J :

$$\exp(tA) = \cos t\, I + \sin t\, A = \begin{pmatrix}\cos t + \sin t & -2\sin t\\ \sin t & \cos t - \sin t\end{pmatrix}$$

b) $X(t) = (\cos t + \sin t, \sin t)$. Vérification : $x' = \cos t - \sin t$ et $x - 2y = \cos t - \sin t$ ✓.

c) $\exp(tA)$ est 2π-périodique, donc les solutions aussi. Avec $x' = x - 2y$, $y' = x - y$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q = 2xx' - 2x'y - 2xy' + 4yy' = 2(x-y)(x-2y) - 2x(x-y) + 4y(x-y) = 0$$

(développer : $2(x^2 - 3xy + 2y^2) - 2x^2 + 2xy + 4xy - 4y^2 = 0$). Les trajectoires sont des ellipses $q =$ constante ; pour $X(0) = (1,0)$, $q = 1$.

Réponse. $A^2 = -I$, $\exp(tA) = \cos t\, I + \sin t\, A$; trajectoires périodiques sur les ellipses $x^2 - 2xy + 2y^2 = c$.

Correction de l'exercice 5 – Équation différentielle d'ordre deux

a) $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$.

b) Avec $\lambda = 2$, $\mu = 1$:

$$\exp(tC) = \mathrm{e}^{2t}(C - I) - \mathrm{e}^{t}(C - 2I) = \begin{pmatrix}2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t\\ 2\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t} & 2\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t\end{pmatrix}$$

c) $X(t) = \exp(tC)(1,0)$ est la première colonne : $y = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t}$. Vérification : $y' = 2\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{2t}$, $y'' = 2\mathrm{e}^t - 4\mathrm{e}^{2t}$, et $y'' - 3y' + 2y = (2 - 6 + 4)\mathrm{e}^t + (-4 + 6 - 2)\mathrm{e}^{2t} = 0$ ✓ ; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ ✓.

Réponse. $y(t) = 2\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t}$ (première colonne de $\exp(tC)$).

Correction de l'exercice 6 – Stabilité d'un système triangulaire

a) Valeurs propres -1 et -2 ; par Lagrange :

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}(A + 2I) - \mathrm{e}^{-2t}(A + I) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\\ 0 & \mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}$$

b) Chaque coefficient est $O(\mathrm{e}^{-t})$, donc $\|X(t)\| = O(\mathrm{e}^{-t})$: décroissance exponentielle, au taux de la valeur propre de plus grande partie réelle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Valeurs propres -1 et 1 : $\exp(tB) = \dfrac{\mathrm{e}^{t}(B+I) - \mathrm{e}^{-t}(B-I)}{2} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \dfrac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{2} \\ 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$. Pour $X(0) = (a, b)$, la solution est bornée si et seulement si le coefficient de e^{t} est nul : $b = 0$ (droite propre de -1, la « variété stable »).

Réponse. $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \to 0$; pour B, solutions bornées si $b = 0$.

Correction de l’exercice 7 – Variation de la constante

a) $X(t) = \exp(tA)\int_0^t \exp(-sA)B\,\mathrm{d}s$, donc

$$X'(t) = A\exp(tA)\int_0^t \exp(-sA)B\,\mathrm{d}s + \exp(tA)\exp(-tA)B = AX(t) + B$$

et $X(0) = 0$.

b) $\exp(uA) = I + uA$ ($A^2 = 0$), donc $\exp((t-s)A)B = (t-s, 1)$ et $X(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, t\right)$. Vérification : $x_1' = t = x_2$ et $x_2' = 1$ ✓.

c) Le système est $x'' = 1$: mouvement uniformément accéléré depuis le repos, $x = \dfrac{t^2}{2}$, $v = t$.

Réponse. $X(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, t\right)$: mouvement uniformément accéléré.

Correction de l’exercice 8 – Formule de Liouville par une équation fonctionnelle

a) sA et tA commutent, donc $\exp((s+t)A) = \exp(sA)\exp(tA)$, et det est multiplicatif. f est dérivable comme composée de det (polynomiale) et de $t \mapsto \exp(tA)$ (C^1).

b) $\exp(tA) = I + tA + O(t^2)$. Dans le développement de $\det(I + tA + O(t^2))$, le terme de degré 1 en t provient du produit des coefficients diagonaux :

$$\det(I + tA + O(t^2)) = \prod_i (1 + ta_{ii}) + O(t^2) = 1 + t\mathrm{tr}A + O(t^2)$$

donc $f'(0) = \mathrm{tr}A$.

c) $f'(t) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(t)f(h) - f(t)}{h} = f(t)f'(0)$: $f' = (\mathrm{tr}A)f$ avec $f(0) = 1$, d’où $f(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}A}$.

Réponse. f multiplicative, $f'(0) = \mathrm{tr}A$, donc $\det\exp(tA) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}A}$.

Correction de l’exercice 9 – Conservation et dissipation de la norme

a) Dérivée d’un produit scalaire : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle X, X\rangle = 2\langle X', X\rangle = 2\langle AX, X\rangle$.

b) $\langle AX, X\rangle = \langle X, A^{\mathsf{T}}X\rangle = -\langle X, AX\rangle$, donc $\langle AX, X\rangle = 0$ et $\|X\|^2$ est constante (cohérent avec $\exp(tA) \in SO(n)$).

c) Par le théorème spectral, $\langle AX, X\rangle \le -\alpha\|X\|^2$. Alors $g = \|X\|^2$ vérifie $g' \le -2\alpha g$, d’où $(g\,\mathrm{e}^{2\alpha t})' \le 0$ et

$$\|X(t)\|^2 \le \mathrm{e}^{-2\alpha t}\|X(0)\|^2$$

Réponse. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X\|^2 = 2\langle AX, X\rangle$: nul si A antisymétrique ; $\|X\| \le \mathrm{e}^{-\alpha t}\|X(0)\|$ si $A \le -\alpha I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Formule de Trotter

a) $\exp(M) = I + M + O(\|M\|^2)$, donc $X_n = I + \frac{A+B}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $Y_n = I + \frac{A+B}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

b) Somme télescopique : les termes intermédiaires $X_n^{k+1} Y_n^{n-1-k}$ s'annulent deux à deux. Et $\|X_n\|, \|Y_n\| \leq \mathrm{e}^{(\|A\|+\|B\|)/n}$, donc chaque terme est majoré par

$$\mathrm{e}^{\frac{n-1}{n}(\|A\|+\|B\|)}\|X_n - Y_n\| \leq \mathrm{e}^{\|A\|+\|B\|}\|X_n - Y_n\|$$

c) $\|X_n^n - Y_n^n\| = n \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right) \to 0$, et $Y_n^n = \exp(A+B)$ ($\frac{A+B}{n}$ commute avec lui-même). Même sans commutation, $\exp(A+B)$ est la limite de produits d'exponentielles de A et B « en petits pas alternés ».

Réponse. Erreur locale $O(\frac{1}{n^2})$, n pas : $\left(\exp\frac{A}{n}\exp\frac{B}{n}\right)^n \to \exp(A+B)$.

Correction de l'exercice 11 – Conjugaison par l'exponentielle

a) $F' = A\exp(tA)B\exp(-tA) - \exp(tA)BA\exp(-tA) = \exp(tA)(AB-BA)\exp(-tA)$ (commutation de A et $\exp(tA)$).

b) Si $C = [A,B]$ commute avec A, alors $\exp(tA)C\exp(-tA) = C$, donc $F' = C$ constante et $F(t) = F(0) + tC = B + t[A,B]$.

c) $AB = 0$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, donc $[A,B] = -A$, qui commute avec A. Avec $\exp(tA) = I + tA$:

$$(I+tA)B(I-tA) = B - tBA + tAB - t^2ABA = B - tA = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

conforme à b).

Réponse. $F' = \exp(tA)[A,B]\exp(-tA)$; si $[A,[A,B]] = 0$, $F(t) = B + t[A,B]$.

Correction de l'exercice 12 – L'exponentielle est un polynôme en A

a) C'est un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie, donc fermé. Les sommes partielles de la série exponentielle sont dans $\mathrm{K}[A]$, leur limite aussi.

b) $A^2 = I$, valeurs propres ± 1 : $\exp(A) = \mathrm{ch}1\, I + \mathrm{sh}1\, A$, soit

$$P(X) = \mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}1\, X$$

c) Oui : P doit interpoler e^x sur le spectre de A (avec multiplicités du polynôme minimal). Aucun polynôme ne convient pour toutes les matrices : il faudrait $P(\lambda) = \mathrm{e}^\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathrm{K}$ (matrices λI), impossible pour un polynôme.

Réponse. $\exp(A) \in \mathrm{K}[A]$ (sous-espace fermé) ; ici $P = \mathrm{ch}1 + \mathrm{sh}1\, X$; P dépend du spectre de A.

Correction de l'exercice 13 – Oscillateur à amortissement critique

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $N = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, et $N^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = 0$.

b) $-I$ et N commutent :

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}(I + tN) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

c) $x = (1+t)\mathrm{e}^{-t}$, $y = -t\mathrm{e}^{-t}$. Vérification : $x' = \mathrm{e}^{-t}(1-1-t) = y$ ✓. Pour $t \geq 0$, $x > 0$: retour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

à l'équilibre sans oscillation, le plus rapidement possible parmi les régimes non oscillants.

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$; $x = (1+t)\mathrm{e}^{-t} > 0$.

Correction de l'exercice 14 – L'exponentielle comme limite

a) Binôme (I et A commutent) : $\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{A^k}{n^k}$. Et $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\prod_{j<k}\left(1 - \frac{j}{n}\right) \le \frac{1}{k!}$.

b) Inégalité triangulaire avec $c_{n,k} \ge 0$:

$$\left\| \exp(A) - \left(I + \frac{A}{n}\right)^n \right\| \le \sum_{k \le n} c_{n,k}\|A\|^k + \sum_{k>n} \frac{\|A\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n$$

c) Le membre de droite tend vers 0 (limite réelle classique). La méthode d'Euler de pas $\frac{1}{n}$ pour $X' = AX$ donne $X_{k+1} = \left(I + \frac{A}{n}\right)X_k$, donc $X_n = \left(I + \frac{A}{n}\right)^n X_0 \to \exp(A)X_0$.

Réponse. $\left(I + \frac{A}{n}\right)^n \to \exp(A)$, avec l'erreur majorée par $\mathrm{e}^{\|A\|} - (1 + \frac{\|A\|}{n})^n$ (méthode d'Euler).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : équation matricielle de Lyapunov

a) $X' = A\exp(tA)X_0\exp(tB) + \exp(tA)X_0\exp(tB)B = AX + XB$. Si X est une solution, $Y = \exp(-tA)X\exp(-tB)$ vérifie $Y' = \exp(-tA)(-AX + X' - XB)\exp(-tB) = 0$, donc $Y = X_0$.

b) $X(t)^{\mathsf{T}} = \exp(tB)^{\mathsf{T}}X_0^{\mathsf{T}}\exp(tA)^{\mathsf{T}} = \exp(tA)X_0\exp(tA^{\mathsf{T}}) = X(t)$.

c) $\exp(tA)\exp(tA^{\mathsf{T}}) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-2t}, \mathrm{e}^{-4t})$, d'où

$$S = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \qquad AS + SA^{\mathsf{T}} = \mathrm{diag}(-1,-1) = -I$$

d) $\|\exp(tA)x\|^2 = x^{\mathsf{T}}\exp(tA^{\mathsf{T}})\exp(tA)x$, et ici A est symétrique, donc égal à $x^{\mathsf{T}}\exp(tA)\exp(tA^{\mathsf{T}})x$; en intégrant, on obtient $x^{\mathsf{T}}Sx = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4}$: S mesure l'« énergie totale » de la solution issue de x.

Réponse. $X(t) = \exp(tA)X_0\exp(tB)$; $S = \mathrm{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ vérifie $AS + SA^{\mathsf{T}} = -I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).