Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : fonctions de matrices, chaînes de Markov et systèmes

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Fonctions de matrices. Si $\sum a_k z^k$ a un rayon $R > \|A\|$, $f(A) = \sum a_k A^k$ converge absolument, commute avec A, et $Ax = \lambda x \Rightarrow f(A)x = f(\lambda)x$.

Partie nilpotente. Pour $N^3 = 0$:

$$\sqrt{I+N} = I + \frac{N}{2} - \frac{N^2}{8}, \qquad \ln(I+N) = N - \frac{N^2}{2}$$

Markov. Pour P stochastique à deux états de paramètres $a, b \in]0,1]$ (pas tous deux égaux à 1) : $P^n \to \Pi$, matrice dont les lignes valent la loi stationnaire $\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$.

Erreur de troncature. $\left\| \exp(A) - \sum_{k \leq N} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{(N+1)!} e^{\|A\|}$.

Correction de l'exercice 1 – Racine carrée d'une matrice unipotente

a) On développe, les termes en N^3 et au-delà étant nuls :

$$R^2 = I + N - \frac{N^2}{4} + \frac{N^2}{4} + O(N^3) = I + N$$

(les coefficients sont ceux de $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots$).

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4(I+N)$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$. Donc $X = 2\left(I + \frac{N}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

vérification : $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ ✓.

c) Si $X^2 = N_0$ avec $N_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $X^4 = N_0^2 = 0$: X est nilpotente de taille 2, donc $X^2 = 0 \neq N_0$. Contradiction.

Réponse. $\sqrt{I+N} = I + \frac{N}{2} - \frac{N^2}{8}$; $X = \begin{pmatrix} 2 & 1/4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; N_0 n'a pas de racine carrée.

Correction de l'exercice 2 – Chaîne de Markov à deux états

a) $\Pi + D = I$ et $\Pi + (1-a-b)D = I - (a+b)D = P$ ✓. On vérifie $\Pi^2 = \Pi$ (lignes égales, de somme 1), puis $D = I - \Pi$ donne $D^2 = D$ et $\Pi D = 0$. Par le binôme (termes croisés nuls) :

$$P^n = \Pi + (1-a-b)^n D$$

b) $|1-a-b| < 1$, donc $P^n \to \Pi$, et $\sum (P^n - \Pi) = \sum (1-a-b)^n D = \frac{1}{a+b} D$ (série géométrique).

c) $\Pi = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ et $\sum (P^n - \Pi) = 2D = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}8 \\ -1{,}2 & 1{,}2 \end{pmatrix}$. La loi stationnaire est $(0{,}6\,;0{,}4)$.

Réponse. $P^n = \Pi + (1-a-b)^n D \to \Pi$; $\sum (P^n - \Pi) = \frac{D}{a+b}$; loi stationnaire $(0{,}6\,;0{,}4)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Chaîne de Markov en temps continu

a) $Q^2 = \begin{pmatrix} a^2+ab & -a^2-ab \\ -b^2-ab & ab+b^2 \end{pmatrix} = -(a+b)Q$. Donc $Q^k = (-(a+b))^{k-1}Q$ pour $k \geq 1$ et

$$\exp(tQ) = I + \sum_{k\geq 1} \frac{t^k(-(a+b))^{k-1}}{k!}Q = I + \frac{1-\mathrm{e}^{-(a+b)t}}{a+b}Q$$

b) Avec $c = \frac{1-\mathrm{e}^{-(a+b)t}}{a+b} \in \left[0, \frac{1}{a+b}\right[$: les coefficients diagonaux $1-ca$ et $1-cb$ sont >0 (car $ca < \frac{a}{a+b} < 1$), les autres ca, $cb \geq 0$; chaque ligne de Q est de somme nulle, donc celles de $\exp(tQ)$ de somme 1.

c) $c \to \frac{1}{a+b}$, d'où $\exp(tQ) \to I + \frac{Q}{a+b} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$: même loi stationnaire qu'en temps discret.

Réponse. $\exp(tQ) = I + \frac{1-\mathrm{e}^{-(a+b)t}}{a+b}Q$, stochastique, $\to \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – Fibonacci par la résolvante

a) Récurrence : $A^{n+1} = A^nA = \begin{pmatrix} F_{n+1}+F_n & F_{n+1} \\ F_n+F_{n-1} & F_n \end{pmatrix}$.

b) Si $|x|\|A\| < 1$, série de Neumann. Et

$$(I-xA)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-x & -x \\ -x & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-x-x^2}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1-x \end{pmatrix}$$

c) Le coefficient $(1,2)$ de $\sum x^nA^n$ vaut $\sum F_nx^n$ (avec $F_0 = 0$ pour $n=0$), d'où la formule. Les valeurs propres de A sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-\frac{1}{\varphi}$: la série converge (absolument) pour $|x| < \frac{1}{\varphi} \approx 0{,}618$, et diverge au-delà ($F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$).

Réponse. $\sum F_nx^n = \frac{x}{1-x-x^2}$ pour $|x| < \frac{1}{\varphi}$ (coefficient $(1,2)$ de $(I-xA)^{-1}$).

Correction de l'exercice 5 – Exponentielle des matrices symétriques

a) $A = P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{\mathsf{T}}$ avec P orthogonale, donc $\exp(A) = P\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i})P^{\mathsf{T}}$: symétrique à valeurs propres >0.

b) Surjectivité : $S = P\mathrm{diag}(\mu_i)P^{\mathsf{T}}$ avec $\mu_i > 0$ est l'image de $P\mathrm{diag}(\ln \mu_i)P^{\mathsf{T}}$. Injectivité : $\exp(A)$ agit par e^{λ} sur l'espace propre $E_\lambda(A)$; $t \mapsto \mathrm{e}^t$ étant injective, les espaces propres de $\exp(A)$ sont exactement ceux de A, avec

$$E_{\mathrm{e}^\lambda}(\exp A) = E_\lambda(A)$$

Donc A est déterminée par $\exp(A)$: elle vaut $\ln\mu$ sur $E_\mu(\exp A)$.

c) Non : $\exp(\pi J) = -I_2$ a pour trace -2. (Pour A symétrique, $\mathrm{tr}\exp(A) = \sum \mathrm{e}^{\lambda_i} > 0$.)

Réponse. $\exp : S_n \to S_n^{++}$ est bijective (inverse : logarithme spectral) ; $\mathrm{tr}\exp(\pi J) = -2$.

Correction de l'exercice 6 – Amplification transitoire d'un système stable

a) Par Lagrange (valeurs propres -1, -2) :
$\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}(A+2I) - \mathrm{e}^{-2t}(A+I) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & g(t) \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$, qui tend vers 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $g'(t) = 10\left(-\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t}\right) = 0$ pour $\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{2}$, soit $t = \ln 2$, et

$$g(\ln 2) = 10\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2{,}5$$

c) $X(t) = (g(t), \mathrm{e}^{-2t})$ a une première composante qui atteint 2,5, alors que $\|X(0)\|_\infty = 1$: la solution est multipliée par 2,5 avant de décroître. Les valeurs propres décrivent le comportement asymptotique, pas le régime transitoire (matrice non normale).

Réponse. $\exp(tA) \to 0$ mais son coefficient $(1,2)$ atteint 2,5 en $t = \ln 2$: amplification transitoire.

Correction de l'exercice 7 – Oscillateur forcé à la résonance

a) $X(t) = \int_0^t R_{t-s}\begin{pmatrix}\cos s\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix}\cos(t-s)\cos s\\ \sin(t-s)\cos s\end{pmatrix}\mathrm{d}s$.

b) Avec $\cos(t-s)\cos s = \frac{1}{2}(\cos t + \cos(t-2s))$ et $\sin(t-s)\cos s = \frac{1}{2}(\sin t + \sin(t-2s))$, et $\int_0^t \cos(t-2s)\,\mathrm{d}s = \sin t$, $\int_0^t \sin(t-2s)\,\mathrm{d}s = 0$:

$$x(t) = \frac{t\cos t + \sin t}{2}, \qquad y(t) = \frac{t\sin t}{2}$$

c) $y' = \frac{\sin t + t\cos t}{2} = x$ ✓ ; $x' = \frac{\cos t - t\sin t + \cos t}{2} = \cos t - y$ ✓. L'amplitude croît linéairement en $\frac{t}{2}$: forçage à la pulsation propre, c'est la résonance.

Réponse. $y = \frac{t\sin t}{2}$, $x = \frac{t\cos t + \sin t}{2}$: amplitude croissant comme $\frac{t}{2}$ (résonance).

Correction de l'exercice 8 – Exponentielles égales de nilpotentes qui commutent

a) $A^p = B^p = 0$; par le binôme (commutation), $(A-B)^{2p} = \sum_k \binom{2p}{k} A^k (-B)^{2p-k} = 0$, car dans chaque terme $k \geq p$ ou $2p - k \geq p$.

b) A et $-B$ commutent, donc

$$\exp(A-B) = \exp(A)\exp(-B) = \exp(A)\exp(B)^{-1} = I$$

c) $A - B$ est nilpotente d'exponentielle I, donc $A - B = 0$. Ainsi l'exponentielle est **injective** sur l'ensemble des nilpotentes d'une même sous-algèbre commutative (et même sur toutes les nilpotentes, son inverse étant $N \mapsto \ln(I+N)$).

Réponse. $A - B$ nilpotente et $\exp(A-B) = I$, donc $A = B$.

Correction de l'exercice 9 – Formule du déterminant par densité

a) $A = PDP^{-1}$, $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ et $\det\exp(D) = \prod \mathrm{e}^{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\sum \lambda_i} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$.

b) Sur la boule $\|A\| \leq R$, $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leq \frac{R^k}{k!}$: la série de fonctions continues $A \mapsto \frac{A^k}{k!}$ converge normalement, sa somme est continue sur chaque boule, donc partout.

c) Les deux applications

$$A \mapsto \det\exp(A), \qquad A \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$$

sont continues et coïncident sur une partie dense : elles sont égales.

Réponse. Vrai pour les diagonalisables ; les deux membres sont continus ; densité : $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ partout.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 10 – Exponentielle d’une matrice triangulaire par blocs

a) Récurrence : $M^{k+1} = M^k M = \begin{pmatrix} A^{k+1} & A^k B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Le bloc supérieur droit de $\exp(tM)$ vaut $\sum_{k \geq 1} \frac{t^k A^{k-1} B}{k!}$, et

$$\int_0^t \exp(sA) B \, \mathrm{d}s = \sum_{k \geq 0} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} A^k B$$

(intégration terme à terme d’une série normalement convergente sur $[0, t]$) : c’est la même série.

c) $Y = (X, 1)$ vérifie $Y' = MY$: $X(t) = \exp(tA) X_0 + \int_0^t \exp(sA) B \, \mathrm{d}s$, ce qui est la formule de variation de la constante pour B constant (changer s en $t - s$).

Réponse. $\exp(tM) = \begin{pmatrix} \exp(tA) & \int_0^t \exp(sA) B \, \mathrm{d}s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: un système affine devient linéaire en dimension $n + 1$.

Correction de l’exercice 11 – Arc tangente d’une matrice

a) $\left\| \frac{A^{2k+1}}{2k+1} \right\| \leq \|A\|^{2k+1}$, série géométrique convergente.

b) $\mathrm{Arctan}(A) = \mathrm{diag}\left(\arctan \frac{1}{2}, -\arctan \frac{1}{3}\right)$. Par la formule d’addition,

$$\arctan \frac{1}{2} - \arctan \frac{1}{3} = \arctan \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{6}} = \arctan \frac{1}{7}$$

(les deux angles sont dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

c) Seul le terme $k = 0$ subsiste : $\mathrm{Arctan}(N) = N$ (comme $\arctan x \sim x$).

Réponse. $\mathrm{Arctan}(A) = \mathrm{diag}(\arctan \frac{1}{2}, -\arctan \frac{1}{3})$, de trace $\arctan \frac{1}{7}$; $\mathrm{Arctan}(N) = N$.

Correction de l’exercice 12 – Coefficients non constants : l’exponentielle de l’intégrale échoue

a) $A(s)A(t) = \begin{pmatrix} st & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A(t)A(s) = \begin{pmatrix} ts & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $M = \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 = \frac{t^2}{2} M$, donc $\exp(M) = I + \frac{\mathrm{e}^{t^2/2} - 1}{t^2/2} M = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t^2/2} & \frac{2(\mathrm{e}^{t^2/2} - 1)}{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $y' = 0$ donne $y = 1$, puis $x' = tx + 1$, $x(0) = 0$: $x = \mathrm{e}^{t^2/2} \int_0^t \mathrm{e}^{-s^2/2} \, \mathrm{d}s = t + \frac{t^3}{3} + O(t^5)$. Or

$$\frac{2(\mathrm{e}^{t^2/2} - 1)}{t} = t + \frac{t^3}{4} + O(t^5)$$

Les deux diffèrent dès l’ordre 3 : $\exp\left(\int_0^t A\right)$ n’est solution que si les $A(t)$ commutent entre eux.

Réponse. Vraie solution $x = t + \frac{t^3}{3} + \cdots$, contre $t + \frac{t^3}{4} + \cdots$ pour $\exp(\int A)$: faute de commutation, la formule échoue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Troncature de la série exponentielle

a) $\left\| \sum_{k>N} \frac{A^k}{k!} \right\| \le \sum_{k>N} \frac{x^k}{k!}$ avec $x = \|A\|$, et

$$\sum_{k>N} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{j \ge 0} \frac{(N+1)!\, x^j}{(N+1+j)!} \le \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \mathrm{e}^{x}$$

b) Il faut $(N+1)! \ge \mathrm{e} \times 10^8 \approx 2{,}72 \times 10^8$: $11! \approx 3{,}99 \times 10^7$ ne suffit pas, $12! \approx 4{,}79 \times 10^8$ convient, d’où $N = 11$.

c) $2^{-s}A$ commute avec lui-même : $\exp(2^{-s}A)^{2^s} = \exp(A)$. Pour $\|A\| = 10$, $s = 5$ donne $\|2^{-5}A\| = 0{,}3125$: quelques termes suffisent, puis 5 élévations au carré. Sans cela, il faudrait plus de 40 termes et l’on additionnerait des termes énormes ($\frac{10^{10}}{10!} \approx 2\,756$) qui se compensent.

Réponse. Erreur $\le \frac{\|A\|^{N+1} \mathrm{e}^{\|A\|}}{(N+1)!}$; $N = 11$ pour 10^{-8} ; méthode « scaling and squaring » avec $s = 5$.

Correction de l’exercice 14 – Fonction exponentielle et commutant

a) Si $BA = AB$, alors $BA^k = A^k B$, puis on passe à la limite dans les sommes partielles.

b) $\exp(A) = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{2i\pi}, 1) = I$ commute avec tout, mais A ne commute pas avec E_{12} :

$$AE_{12} = 2i\pi E_{12} \neq 0 = E_{12}A$$

c) $A = P\mathrm{diag}(\lambda_i)P^{-1}$ et $\exp(A) = P\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i})P^{-1}$ avec des e^{λ_i} deux à deux distincts : les espaces propres de $\exp(A)$ sont les droites propres de A. Si B commute avec $\exp(A)$, B stabilise ces droites, donc est diagonale dans la même base, et commute avec A.

Réponse. $[B, A] = 0 \Rightarrow [B, \exp A] = 0$; réciproque fausse ($\exp(2i\pi E_{11}) = I$), vraie si les e^{λ_i} sont distincts.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : diffusion sur un graphe

a) $L(1,1,1) = 0$; $L(1,0,-1) = (1,0,-1)$;
$L(1,-2,1) = (1+2, -1-4-1, 2+1) = 3(1,-2,1)$.

b) L est symétrique, ces vecteurs sont orthogonaux ; avec u_1, u_2, u_3 normalisés :

$$\exp(-tL) = u_1 u_1^{\mathsf{T}} + \mathrm{e}^{-t} u_2 u_2^{\mathsf{T}} + \mathrm{e}^{-3t} u_3 u_3^{\mathsf{T}}$$

c) Les coordonnées de e_1 sur u_j donnent $X(t) = \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}(1,0,-1) + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{6}(1,-2,1)$. En $t = 0$: $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}, \frac{1}{3}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) = (1,0,0)$ ✓.

d) L est symétrique et ses lignes sont de somme nulle, donc $(1,1,1)L = 0$, donc $(x_1+x_2+x_3)' = -(1,1,1)LX = 0$: la chaleur totale est conservée. $X(t) \to \frac{1}{3}(1,1,1)$: la température s’uniformise, au rythme e^{-t} (plus petite valeur propre non nulle).

Réponse. $X(t) = \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2}(1,0,-1) + \frac{\mathrm{e}^{-3t}}{6}(1,-2,1) \to \frac{1}{3}(1,1,1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).