# Plaquette 1 – Séries dans un Banach, convergence normale et exponentielle de matrices

## Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

### Boîte à outils

**Cadre.** $E$ espace vectoriel normé ; $\sum u_n$ avec $u_n \in E$.

— **Convergence absolue** : $\sum \|u_n\| < +\infty$.

— **Théorème fondamental** : dans un espace **complet (Banach)**, toute série **absolument convergente** est convergente. C'est faux dans un evn non complet.

— Tout evn de **dimension finie** est un Banach ; $M_n(\mathrm{K})$ en particulier.

— **Inégalité triangulaire généralisée** : $\left\|\sum_n u_n\right\| \leq \sum_n \|u_n\|$.

**Normes d'algèbre.** Une norme sur $M_n(\mathrm{K})$ est **sous-multiplicative** si $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ ; c'est le cas des normes **subordonnées**. On a alors $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$.

**Série géométrique d'opérateurs.** Si $\|A\| < 1$ pour une norme d'algèbre, alors $I - A$ est **inversible** et

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k, \qquad \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

**Exponentielle de matrice.**

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

— La série converge **absolument** pour toute $A$ (majoration par $\mathrm{e}^{\|A\|}$).

— Si $AB = BA$ : $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. **Faux** sans commutation.

— $\exp(A)$ est **toujours inversible**, d'inverse $\exp(-A)$.

— $\exp\left(PAP^{-1}\right) = P\exp(A)P^{-1}$ ; si $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\exp(D) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_i}\right)$.

— $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$.

— $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable de dérivée $A\exp(tA)$ : c'est la solution de $X' = AX$, $X(0) = I$.

## Correction de l'exercice 1 – Convergence absolue dans un Banach

— **Sous-multiplicativité** : $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k = 0{,}4^k$.

— $\sum 0{,}4^k$ est une série **géométrique convergente** (raison $< 1$), donc $\sum A^k$ converge **absolument**.

— $M_2(\mathbb{R})$ est de **dimension finie**, donc complet : la série **converge**.

— **Majoration** :

$$\left\|\sum_{k\geq 0} A^k\right\| \leq \sum_{k\geq 0} 0{,}4^k = \frac{1}{1-0{,}4} = \frac{1}{0{,}6} \approx 1{,}667$$

— **Identification de la somme** : $(I-A)\sum_{k=0}^{N} A^k = I - A^{N+1} \to I$, donc la somme vaut $(I-A)^{-1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conséquence** : dès que $\|A\| < 1$, la matrice $I - A$ est **inversible** — critère très utile en analyse numérique (conditionnement, perturbations).

**Réponse.** Converge vers $(I-A)^{-1}$, de norme $\leq \dfrac{1}{0{,}6} \approx 1{,}67$.

## Correction de l'exercice 2 – Exponentielle d'une matrice diagonale

— $A$ est **diagonale**, donc $A^k = \operatorname{diag}\left(1^k, (-2)^k\right)$.

— La série se calcule coefficient par coefficient :

$$\exp(A) = \operatorname{diag}\left(\sum_k \frac{1}{k!}, \sum_k \frac{(-2)^k}{k!}\right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$$

— **Valeurs numériques** : $\mathrm{e} \approx 2{,}71828$ et $\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}13534$.

— **Contrôles** : $\det \exp(A) = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-2} = \mathrm{e}^{-1}$, et $\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} = \mathrm{e}^{1-2} = \mathrm{e}^{-1}$ ✓

— **Règle générale** : pour une matrice **diagonalisable** $A = PDP^{-1}$, on a $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$ — l'exponentielle se calcule sur les **valeurs propres**.

**Réponse.** $\exp(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2} \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 3 – Exponentielle d'une nilpotente

— **Nilpotence** : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

— La série exponentielle est donc une **somme finie** :

$$\exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Contrôles** : $\det \exp(N) = 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}N} = \mathrm{e}^0$ ✓

— **Inverse** : $\exp(-N) = I - N + \dfrac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; le produit avec $\exp(N)$ donne bien $I$ ✓

— **Intérêt** : pour une nilpotente, l'exponentielle est **polynomiale** — c'est ce qui rend les calculs explicites via la décomposition de Dunford $A = D + N$.

**Réponse.** $\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 4 – Exponentielle et décomposition de Dunford

— **Dunford** : $A = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$, et $2I$ commute avec tout.

— **Factorisation** (licite grâce à la commutation) :

$$\exp(A) = \exp(2I)\exp(N) = \mathrm{e}^2 I \times (I + N) = \mathrm{e}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Valeur numérique** : $\mathrm{e}^2 \approx 7{,}389$, donc $\exp(A) \approx \begin{pmatrix} 7{,}389 & 7{,}389 \\ 0 & 7{,}389 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** : $\det = \mathrm{e}^4$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} = \mathrm{e}^4$ ✓

— **Généralisation** : $\exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ — le terme $t\mathrm{e}^{2t}$ est la signature du bloc de Jordan.

**Réponse.** $\exp(A) = \mathrm{e}^2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 5 – Non-commutation

— **Non-commutation** : $AB = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ — différentes.

— **Membres séparés** : $\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\exp(B) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, donc

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

— **Membre de gauche** : $C = A + B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ vérifie $C^2 = I$, donc

$$\exp(C) = \left(\sum_{k\ \text{pair}} \frac{1}{k!}\right) I + \left(\sum_{k\ \text{impair}} \frac{1}{k!}\right) C = \cosh(1) I + \sinh(1) C$$

— Numériquement, $\cosh 1 \approx 1{,}5431$ et $\sinh 1 \approx 1{,}1752$, soit $\exp(C) \approx \begin{pmatrix}1{,}543 & 1{,}175\\ 1{,}175 & 1{,}543\end{pmatrix}$.

— **Conclusion** : les deux résultats diffèrent nettement. La formule $\exp(A+B) = \exp A \exp B$ **exige** la commutation.

— **Contrôle** : $\det\exp(C) = 1{,}543^2 - 1{,}175^2 \approx 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}C} = \mathrm{e}^0$ ✓, alors que $\det(\exp A \exp B) = 2 - 1 = 1$ également — les déterminants coïncident, mais pas les matrices.

**Réponse.** $\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \neq \cosh(1) I + \sinh(1) C$.

## Correction de l'exercice 6 – Exponentielle d'une rotation infinitésimale

— **Puissances** : $J^2 = -I, J^3 = -J, J^4 = I$ — cycle de longueur 4.

— On sépare les termes pairs et impairs de la série :

$$\exp(tJ) = \left(\sum_{p} \frac{(-1)^p t^{2p}}{(2p)!}\right) I + \left(\sum_{p} \frac{(-1)^p t^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) J$$

— On reconnaît les séries de $\cos t$ et $\sin t$ :

$$\exp(tJ) = \cos t\, I + \sin t\, J = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

— C'est la **rotation d'angle** $t$ !

— **Contrôles** : $\det = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ✓ et $\mathrm{e}^{\mathrm{tr}(tJ)} = \mathrm{e}^0 = 1$ ✓

— **Interprétation** : $J$ est le **générateur infinitésimal** du groupe des rotations $SO(2)$ ; l'analogie avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ n'est pas fortuite, $J$ jouant le rôle de i.

**Réponse.** $\exp(tJ) = \begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$ : la rotation d'angle $t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 7 – Déterminant de l'exponentielle

— Sur $\mathbb{C}$, $A$ est **trigonalisable** : $A = PTP^{-1}$ avec $T$ triangulaire de diagonale $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

— **Conjugaison** : $\exp(A) = P\exp(T)P^{-1}$, donc $\det\exp(A) = \det\exp(T)$.

— **Structure de** $\exp(T)$ : les puissances $T^k$ sont triangulaires de diagonale $\left(\lambda_i^k\right)$, donc $\exp(T)$ est triangulaire de diagonale $\left(\mathrm{e}^{\lambda_i}\right)$.

— **Déterminant** :

$$\det\exp(T) = \prod_i \mathrm{e}^{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\sum_i \lambda_i} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$$

— **Conséquence majeure** : $\det\exp(A) \neq 0$ — l'exponentielle d'une matrice est **toujours inversible**, quelle que soit $A$.

— **Contrôle** : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donne $\det\exp(A) = 1 = \mathrm{e}^0$ ✓

**Réponse.** Trigonalisation : les valeurs propres de $\exp(A)$ sont les $\mathrm{e}^{\lambda_i}$.

## Correction de l'exercice 8 – Résolution d'un système différentiel

— **Solution générale** : $X(t) = \exp(tA)X(0)$.

— $A$ étant diagonale, $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$.

— **Solution** :

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $X'(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ 3\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} = AX(t)$ ✓ et $X(0) = (2, 1)$ ✓

— **Comportement** : les deux composantes croissent, la seconde **dominant** largement ( $\mathrm{e}^{3t}$) — la direction propre associée à la plus grande valeur propre finit par imposer le comportement asymptotique.

— **Cas général** : dès que $A$ est diagonalisable, on se ramène à ce cas par changement de base.

**Réponse.** $X(t) = \left(2\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{3t}\right)$.

## Correction de l'exercice 9 – Série de matrices

— **Norme** : $\|A\|_\infty = \dfrac{1}{2} < 1$, donc la série converge vers $(I - A)^{-1}$.

— **Calcul** : $I - A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, de déterminant $1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$.

$$(I - A)^{-1} = \frac{1}{3/4}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $(I - A) \times \begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 - 1/3 & 2/3 - 2/3 \\ -2/3 + 2/3 & -1/3 + 4/3 \end{pmatrix} = I$ ✓

— **Contrôle par le spectre** : $A$ a pour valeurs propres $\pm\dfrac{1}{2}$, donc $(I - A)^{-1}$ a pour valeurs propres $\dfrac{1}{1 \mp \frac{1}{2}}$, soit 2 et $\dfrac{2}{3}$ ; leur somme $\dfrac{8}{3}$ est bien la trace obtenue ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $\begin{pmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 10 – Convergence normale d'une série de fonctions à valeurs vectorielles

On majore la norme de chaque terme, indépendamment de $t$.

— Avec $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ : $\|f_n(t)\|_\infty = \dfrac{|t|^n}{n^2}\max(1,n) = \dfrac{|t|^n}{n}$ pour $n \geq 1$.

— **Majoration uniforme** sur $[0\,;1]$ : $\sup_{t\in[0;1]}\|f_n(t)\| = \dfrac{1}{n}$.

— Or $\sum \dfrac{1}{n}$ **diverge** : il n'y a **pas** convergence normale sur $[0\,;1]$.

— **Sur** $[0\,;a]$ **avec** $a<1$ : $\sup\|f_n\| = \dfrac{a^n}{n} \leq a^n$, terme d'une géométrique convergente — la convergence **est** normale sur tout $[0\,;a]$, $a<1$.

— **Leçon** : la convergence normale est souvent obtenue sur des **sous-intervalles compacts**, pas sur l'intervalle entier ; c'est déjà suffisant pour la continuité de la somme.

**Réponse.** Non sur $[0\,;1]$ ; oui sur tout $[0\,;a]$ avec $a<1$.

## Correction de l'exercice 11 – Exponentielle et valeurs propres

— **Valeurs propres** : si $Ax = \lambda x$, alors $\exp(A)x = \mathrm{e}^{\lambda}x$ (la série s'applique au vecteur propre).

— Ici : $\mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{\ln 2} = 2$.

— **Trace** : $\operatorname{tr}\exp(A) = 1+2 = 3$.

— **Déterminant** : $\det\exp(A) = 1\times 2 = 2$, et l'on vérifie $\mathrm{e}^{\operatorname{tr}A} = \mathrm{e}^{0+\ln 2} = 2$ ✓

— **Remarque importante** : ces résultats valent même si $A$ n'est pas diagonalisable — la trigonalisation suffit.

— **Attention au sens inverse** : toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ est une exponentielle, mais ce n'est **pas** vrai sur $\mathbb{R}$ (par exemple $\operatorname{diag}(-1,1)$ n'est l'exponentielle d'aucune matrice réelle).

**Réponse.** Valeurs propres 1 et 2 ; trace 3 ; déterminant 2.

## Correction de l'exercice 12 – Le groupe linéaire est ouvert et l'inversion continue

a) $\|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\|\|H\| < 1$, donc $I + A^{-1}H$ est inversible d'inverse $\sum_k (-A^{-1}H)^k$ (série géométrique absolument convergente dans l'espace complet $M_n(\mathrm{K})$). Alors $A+H$ est un produit d'inversibles et

$$(A+H)^{-1} = (I+A^{-1}H)^{-1}A^{-1} = \sum_{k\geq 0}(-A^{-1}H)^k A^{-1}$$

b) La boule ouverte de centre $A$ et de rayon $\dfrac{1}{\|A^{-1}\|}$ est incluse dans $GL_n(\mathrm{K})$.

c) $(A+H)^{-1} - A^{-1} = \sum_{k\geq 1}(-A^{-1}H)^k A^{-1}$, de norme $\leq \sum_{k\geq 1}(\|A^{-1}\|\|H\|)^k\|A^{-1}\|$, ce qui donne la majoration ; elle tend vers 0 quand $H\to 0$ : l'inversion est continue en $A$.

**Réponse.** $(A+H)^{-1} = \sum(-A^{-1}H)^kA^{-1}$ si $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ : $GL_n$ ouvert, inversion continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 13 – Logarithme d'une matrice unipotente

a) $L^2 = N^2 - N^3 + \frac{N^4}{4} = N^2$ et $L^3 = L \cdot L^2 = N^3 - \frac{N^4}{2} = 0$.

b) $L$ est nilpotente d'indice $\leq 3$, donc

$$\exp(L) = I + L + \frac{L^2}{2} = I + N - \frac{N^2}{2} + \frac{N^2}{2} = I + N$$

c) La matrice s'écrit $I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$ et $N^2 = E_{13}$. Donc

$L = N - \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient. C'est la série $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots$ tronquée, exacte ici car $N$ est nilpotente.

**Réponse.** $L^2 = N^2$, $L^3 = 0$, $\exp(N - \frac{N^2}{2}) = I + N$.

## Correction de l'exercice 14 – Convergence absolue sans convergence

a) $\left\| \frac{X^k}{k!} \right\| = \frac{1}{k!}$ et

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} = \mathrm{e} < +\infty$$

b) Supposons $S_N = \sum_{k \leq N} \frac{X^k}{k!} \to P$, de degré $d$. Le coefficient d'indice $d+1$ de $S_N - P$ vaut $\frac{1}{(d+1)!}$ dès que $N \geq d+1$, donc $\|S_N - P\| \geq \frac{1}{(d+1)!}$ ne tend pas vers 0 : contradiction.

c) Dans un espace complet, toute série absolument convergente converge. Donc $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ n'est **pas complet** — comme tout espace normé de dimension infinie dénombrable, d'ailleurs.

**Réponse.** $\sum \frac{1}{k!} < \infty$ mais la limite ne serait pas un polynôme : $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : système différentiel couplé

— **Exponentielle** : on a établi $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

— **Solution** :

$$X(t) = \exp(tA)X(0) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $X'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et $AX(t) = (-\sin t, \cos t)$ ✓ ; $X(0) = (1, 0)$ ✓

— **Trajectoire** : $\|X(t)\|^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ — le point parcourt le **cercle unité** à vitesse angulaire constante 1.

— **Explication structurelle** : $A$ est **antisymétrique**, donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X\|^2 = 2\langle X', X\rangle = 2\langle AX, X\rangle = 0$ — la norme est **conservée**.

— **Portée physique** : c'est l'oscillateur harmonique $x'' + x = 0$ écrit sous forme de système ; la conservation de la norme traduit celle de l'**énergie**.

**Réponse.** $X(t) = (\cos t, \sin t)$ : parcours du cercle unité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).