Plaquette 4 – Séries dans un espace de Banach : complétude, séries de Neumann et applications

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Dans un espace **complet**, une série converge dès que ses sommes partielles forment une **suite de Cauchy**, ce qui est garanti par la **convergence absolue**. Ce principe fournit l'existence d'objets définis par une série : inverse $(I-T)^{-1}=\sum T^k$ dès que $\sum\|T^k\|$ converge (série de **Neumann**, y compris pour des opérateurs intégraux sur $C([0,1])$), point fixe d'une contraction (série télescopique des itérés), exponentielle, logarithme. Inversement, une série absolument convergente qui ne converge pas prouve qu'un espace **n'est pas complet**.

Exercice 1 – Convergence absolue dans un espace complet

Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé complet et $\sum u_n$ une série de E telle que $\sum\|u_n\|$ converge.

a) Montrer que la suite (S_n) des sommes partielles est de Cauchy.

b) En déduire que $\sum u_n$ converge et que $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right\|\le\sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|$.

c) Application dans $\mathbb{R}^2$: la série de terme général $\left(\frac{(-1)^n}{n},\frac{1}{n^2}\right)$ converge-t-elle ? absolument ?

Exercice 2 – Réciproque : un critère de complétude

Soit E un espace normé dans lequel toute série absolument convergente converge, et (x_n) une suite de Cauchy de E.

a) Construire une extractrice φ telle que $\|x_{\varphi(k+1)}-x_{\varphi(k)}\|\le 2^{-k}$.

b) Montrer que $(x_{\varphi(k)})$ converge.

c) En déduire que (x_n) converge, donc que E est complet.

Exercice 3 – Séries de fonctions continues pour la norme uniforme

On munit $C([0,2\pi],\mathbb{R})$ de $\|\cdot\|_\infty$, qui le rend complet.

a) Montrer que $f=\sum_{n\ge 1}\frac{\sin(nx)}{n^2}$ définit une fonction continue.

b) Majorer $\|f-S_N\|_\infty$ où S_N est la somme partielle d'ordre N.

c) Combien de termes garantissent une erreur uniforme $\le 10^{-2}$?

Exercice 4 – Un espace non complet

On munit $C([0,1],\mathbb{R})$ de $\|f\|_1=\int_0^1|f|$, et on pose $g_N(x)=\max\left(-1,\min\left(1,N\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)$.

a) Montrer que $\|g_{2N}-g_N\|_1=\frac{1}{2N}$.

b) En déduire que la série $\sum_{n\ge 0}(g_{2^{n+1}}-g_{2^n})$ est absolument convergente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer qu'elle ne converge pas dans $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$, et conclure.

Exercice 5 – Point fixe d'une contraction par une série

Soit E complet, $F \subset E$ fermé, et $f{:}F \to F$ k-lipschitzienne avec $0 \le k < 1$. Soit $x_0 \in F$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

a) Montrer que $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge absolument, et en déduire que (x_n) converge vers un point fixe ℓ de f.

b) Montrer que ℓ est l'unique point fixe, et que $\|x_n - \ell\| \le \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$.

c) Application : $x = 1 + \frac{1}{2}\cos x$ dans $\mathbb{R}$; combien d'itérations depuis $x_0 = 1$ pour 10^{-6} près ?

Exercice 6 – Résolvante d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et une norme d'algèbre.

a) Pour $|\lambda| > \|A\|$, montrer que $\lambda I - A$ est inversible et que $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k \ge 0} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$.

b) En déduire que toute valeur propre de A vérifie $|\lambda| \le \|A\|$.

c) Montrer que $\|(\lambda I - A)^{-1}\| \to 0$ quand $|\lambda| \to +\infty$.

Exercice 7 – Rayon spectral et normes

Soit $\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Sp}A\}$.

a) Montrer que $\rho(A) \le \|A^k\|^{1/k}$ pour toute norme d'algèbre et tout $k \ge 1$.

b) Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $\rho(A)$ et $\|A\|_\infty$. Que dire de $\|A^k\|^{1/k}$?

c) Pour $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, montrer que $\sum B^k$ converge bien que $\|B\|_\infty > 1$.

Exercice 8 – Logarithme de I − tA par une série

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$, une norme d'algèbre, et $F(t) = \sum_{k \ge 1} \frac{t^k A^k}{k}$ pour $|t|\|A\| < 1$.

a) Montrer que F est dérivable et $F'(t) = A(I - tA)^{-1}$.

b) Soient $M, H \in \mathrm{K}[A]$. Montrer que $\exp(M+H) - \exp(M) = \exp(M)(H + O(\|H\|^2))$, et en déduire que $(\exp \circ F)' = F' \exp(F)$.

c) En déduire $\exp(F(t)) = (I - tA)^{-1}$.

Exercice 9 – Produit de Cauchy et exponentielle

Soient $A, B \in M_n(\mathrm{K})$ qui commutent.

a) Rappeler pourquoi le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes de $M_n(\mathrm{K})$ converge vers le produit des sommes.

b) En déduire $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

c) Où a-t-on utilisé $AB = BA$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Série de Neumann d'un opérateur intégral

Sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, on pose $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $|(T^n f)(x)| \le \frac{x^n}{n!}\|f\|_\infty$, et en déduire $\|T^n\| \le \frac{1}{n!}$.

b) En déduire que $I - T$ est inversible et que, pour $g \in E$, l'équation $f - Tf = g$ a pour unique solution $f = \sum_{n \ge 0} T^n g$.

c) Calculer f pour $g = 1$, et vérifier.

Exercice 11 – Une équation intégrale de Fredholm

Soit $\lambda \in]-1,1[$ et l'équation $f(x) = x + \lambda \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, d'inconnue $f \in C([0,1])$.

a) Montrer que $(Tf)(x) = \lambda \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ définit un opérateur de norme $|\lambda|$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

b) En déduire l'existence et l'unicité de la solution, et calculer les termes $T^n g$ pour $g(x) = x$.

c) En déduire f, et retrouver le résultat directement en posant $c = \int_0^1 f$.

Exercice 12 – Sinus et cosinus d'une matrice

Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, on pose $\cos A = \sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}$ et $\sin A = \sum_{k \ge 0} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

a) Justifier la convergence et montrer que $\cos A = \frac{\exp(iA) + \exp(-iA)}{2}$ et $\sin A = \frac{\exp(iA) - \exp(-iA)}{2i}$.

b) En déduire $\cos^2 A + \sin^2 A = I$.

c) Calculer $\cos A$ et $\sin A$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $A = \frac{\pi}{2} I + N$, $N^2 = 0$.

Exercice 13 – Suites récurrentes affines de vecteurs

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ avec $\sum \|A^k\| < \infty$, $B \in \mathbb{R}^n$, et $X_{k+1} = AX_k + B$.

a) Montrer que $X_k = A^k X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B$.

b) En déduire que (X_k) converge vers $(I - A)^{-1} B$, quel que soit X_0.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B = (1,1)$.

Exercice 14 – Équivalence des normes et convergence absolue

Soit E de dimension finie muni de deux normes N_1, N_2.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge absolument pour N_1 si et seulement si elle converge absolument pour N_2.

b) Dans $M_2(\mathbb{R})$, montrer que $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge absolument pour $\|\cdot\|_\infty$ (norme des coefficients), qui n'est pas une norme d'algèbre, en la comparant à une norme subordonnée.

c) Donner une série de $\mathbb{R}^2$ convergente mais non absolument convergente.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : logarithme au voisinage de l'identité

Pour $\|H\| < 1$ (norme d'algèbre), on pose $L(H) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} H^k}{k}$.

a) Avec le même raisonnement que pour $F(t)$ (exercice du logarithme de $I - tA$), montrer que $\exp(L(tH)) = I + tH$ pour $t \in [0, 1]$.

b) En déduire que toute matrice de la boule $B(I, 1)$ est une exponentielle.

c) Montrer que le sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ engendré par $\exp(M_n(\mathbb{R}))$ est $GL_n^+(\mathbb{R})$ (on admet qu'un sous-groupe de $GL_n^+(\mathbb{R})$ contenant un voisinage de I est égal à $GL_n^+(\mathbb{R})$).

d) $\exp(M_n(\mathbb{R}))$ est-il lui-même égal à $GL_n^+(\mathbb{R})$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).