Plaquette 2 – Calculs d'exponentielles et de séries de matrices

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour calculer $\exp(tA)$ ou $\sum A^k$, on exploite une **relation algébrique** vérifiée par A : polynôme annulateur de petit degré ($A^2 = A$, $A^2 = I$, $A^2 = -I$, $N^3 = 0$), ce qui réduit les puissances à une combinaison de I et A ; **diagonalisation** $A = PDP^{-1}$; **décomposition** $A = \lambda I + N$ avec N nilpotente qui commute avec λI. On contrôle toujours le résultat : $\det \exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$, valeurs propres e^{λ_i}, et $t = 0$ donne I.

Exercice 1 – Exponentielle d'un projecteur

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P^2 = P$.

a) Montrer que $\exp(tP) = I + (\mathrm{e}^t - 1)P$.

b) Calculer $\exp(P)$ pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifier la formule du déterminant.

c) Exprimer $\det \exp(tP)$ à l'aide du rang de P.

Exercice 2 – Exponentielle d'une symétrie

Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $S^2 = I$, et en déduire $\exp(tS) = \mathrm{ch}t\, I + \mathrm{sh}t\, S$.

b) Calculer $\exp(S)$ et contrôler avec les valeurs propres.

c) Exprimer $\exp(tS)$ à l'aide des projecteurs $\frac{I+S}{2}$ et $\frac{I-S}{2}$.

Exercice 3 – Diagonalisation et exponentielle

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A dans une base orthonormée.

b) En déduire $\exp(tA)$.

c) Résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = (1, 0)$ et décrire le comportement quand $t \to +\infty$.

Exercice 4 – Similitudes directes

Soit $A = aI + bJ$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\exp(A) = \mathrm{e}^a(\cos b\, I + \sin b\, J)$.

b) Calculer $\exp(A)$ pour $a = 1$, $b = \frac{\pi}{2}$.

c) Quelles matrices $aI + bJ$ ont pour exponentielle $-I$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Interpolation de Lagrange

Soit A annulée par $(X-\lambda)(X-\mu)$ avec $\lambda \neq \mu$.

a) Montrer que $A^k = \dfrac{\lambda^k(A-\mu I) - \mu^k(A-\lambda I)}{\lambda-\mu}$ pour tout $k \geq 0$.

b) En déduire la formule de $\exp(tA)$.

c) Application à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Bloc de Jordan de taille trois

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Écrire $A = I + N$ et calculer $\exp(tA)$.

b) Résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = (0,0,1)$.

c) Vérifier la formule du déterminant.

Exercice 7 – Matrice triangulaire à valeurs propres distinctes

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\exp(A)$ par la formule de Lagrange.

b) Retrouver le résultat en diagonalisant A.

c) Pourquoi le coefficient $(1,2)$ n'est-il pas $\mathrm{e}^1 \cdot 1$?

Exercice 8 – Inverse par série de Neumann finie

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Écrire $M = I - N$ avec N nilpotente, et montrer que $M^{-1} = I + N + N^2$.

b) Calculer M^{-1}.

c) Généraliser : inverse de $I - N$ pour N nilpotente d'indice p.

Exercice 9 – Série dérivée de la série géométrique

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ avec $\|A\| < 1$ pour une norme d'algèbre.

a) Montrer que $\sum_{k \geq 1} k A^{k-1}$ converge absolument.

b) En calculant le produit de Cauchy de $\sum A^k$ par elle-même, montrer que sa somme vaut $(I-A)^{-2}$.

c) Application : $A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Convergence sans condition de norme

Soit $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\|A\|_\infty$ (norme subordonnée à la norme infinie). Le critère $\|A\| < 1$ s'applique-t-il ?

b) Calculer A^k et montrer que $\sum A^k$ converge.

c) Calculer sa somme et vérifier qu'elle vaut $(I - A)^{-1}$.

Exercice 11 – Exponentielle et commutation

Soient $A, B \in M_n(\mathrm{K})$ avec $AB = BA$.

a) Montrer que $B\exp(A) = \exp(A)B$.

b) Admettant $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, montrer que $\exp(A)$ est inversible d'inverse $\exp(-A)$ et que $\exp(kA) = \exp(A)^k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que si $\exp(tA)\exp(tB) = \exp(tB)\exp(tA)$ pour tout t réel, alors $AB = BA$ (développer à l'ordre 2 en t).

Exercice 12 – Exponentielle d'une matrice antisymétrique

a) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique, alors $\exp(A) \in SO(n)$.

b) Calculer $\exp(\theta A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et interpréter.

c) Pour $u \in \mathbb{R}^3$ unitaire, on pose $A_u x = u \wedge x$. Vérifier que $A_u^3 = -A_u$ et en déduire $\exp(\theta A_u) = I + \sin\theta\, A_u + (1-\cos\theta) A_u^2$.

Exercice 13 – Exponentielle égale à l'identité

a) Montrer que $\exp(2\pi J) = I$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: l'exponentielle n'est pas injective.

b) Soit N nilpotente avec $\exp(N) = I$. En écrivant $\exp(N) - I = N\,U$ avec $U = \sum_{k \geq 0} \frac{N^k}{(k+1)!}$, montrer que $N = 0$.

c) Soit A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\exp(A) = I$ si et seulement si $\mathrm{Sp} A \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 14 – Une série voisine de l'exponentielle

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\Phi(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{(k+1)!}$.

a) Justifier la convergence et montrer que $A\Phi(A) = \exp(A) - I$.

b) En déduire $\Phi(A)$ si A est inversible.

c) Calculer $\Phi(A)$ pour $A = \mathrm{diag}(1, 2)$ et pour $A = N$ nilpotente avec $N^2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : la matrice remplie de uns moins l'identité

Soit $U \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1, et $A = U - I$.

a) Montrer que $U^2 = 3U$ et en déduire $\exp(tU) = I + \dfrac{\mathrm{e}^{3t}-1}{3}U$.

b) En déduire $\exp(tA)$.

c) Calculer A^k pour $k \geq 0$ (écrire $A^k = \alpha_k I + \beta_k U$).

d) Résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = (1, 0, 0)$ et donner la limite de $\mathrm{e}^{-2t}X(t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).