Plaquette 3 – Exponentielle de matrices : dérivation et systèmes différentiels

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La fonction $t \mapsto \exp(tA)$ est dérivable de dérivée $A\exp(tA) = \exp(tA)A$: c'est l'outil central pour résoudre $X' = AX$ (solution $\exp(tA)X_0$), prouver des **unicités** (dériver $\exp(-tA)X(t)$), et établir des **identités** (deux fonctions qui vérifient la même équation différentielle avec la même valeur en 0 sont égales). On se ramène aux calculs explicites de la plaquette précédente (diagonalisation, partie nilpotente), et l'on étudie le comportement en $+\infty$ grâce aux valeurs propres.

Exercice 1 – Dérivée de l'exponentielle

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ et $f_k(t) = \dfrac{t^k A^k}{k!}$.

a) Montrer que $\sum f_k'$ converge normalement sur tout segment $[-a, a]$.

b) En déduire que $t \mapsto \exp(tA)$ est de classe C^1 et de dérivée $A\exp(tA)$.

c) Montrer que A et $\exp(tA)$ commutent, puis calculer la dérivée n-ième de $t \mapsto \exp(tA)$.

Exercice 2 – Unicité de la solution d'un système linéaire

Soit $X : \mathbb{R} \to \mathrm{K}^n$ dérivable avec $X' = AX$ et $X(0) = X_0$.

a) Calculer la dérivée de $Y(t) = \exp(-tA)X(t)$.

b) En déduire $X(t) = \exp(tA)X_0$.

c) Montrer de même que $\exp(tA)\exp(-tA) = I$, sans utiliser la formule $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

Exercice 3 – Groupes à un paramètre

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ dérivable avec $\varphi(0) = I$ et $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t)$ pour tous s, t.

a) Montrer que $\varphi'(t) = \varphi(t)A$ avec $A = \varphi'(0)$.

b) En déduire $\varphi(t) = \exp(tA)$.

c) Déterminer φ si de plus $\varphi(t)$ est la matrice de rotation d'angle ωt du plan.

Exercice 4 – Système à valeurs propres imaginaires

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^2 et en déduire $\exp(tA)$.

b) Résoudre $X' = AX$ avec $X(0) = (1, 0)$.

c) Montrer que les trajectoires sont des courbes fermées, sur lesquelles $q(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ est constante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équation différentielle d'ordre deux

On considère $y'' - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

a) Écrire l'équation sous la forme $X' = CX$ avec $X = (y, y')$.

b) Calculer $\exp(tC)$ par la formule de Lagrange.

c) En déduire y, et vérifier.

Exercice 6 – Stabilité d'un système triangulaire

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\exp(tA)$.

b) Montrer que toute solution de $X' = AX$ tend vers 0 en $+\infty$, et donner un taux de décroissance.

c) Même question pour $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: quelles conditions initiales donnent une solution bornée ?

Exercice 7 – Variation de la constante

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et le système $X' = AX + B$, $X(0) = 0$.

a) Vérifier que $X(t) = \int_0^t \exp((t-s)A)B\,\mathrm{d}s$ est solution.

b) Calculer $X(t)$.

c) Interpréter en mécanique (x position, x' vitesse).

Exercice 8 – Formule de Liouville par une équation fonctionnelle

Soit $f(t) = \det \exp(tA)$.

a) Montrer que $f(s+t) = f(s)f(t)$ et que f est dérivable.

b) Montrer que $f'(0) = \mathrm{tr}A$ (développer $\det(I + tA + O(t^2))$).

c) En déduire $f(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{tr}A}$, sans trigonaliser.

Exercice 9 – Conservation et dissipation de la norme

Soit X solution de $X' = AX$ dans $\mathbb{R}^n$ euclidien.

a) Montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X\|^2 = 2\langle AX, X\rangle$.

b) Si A est antisymétrique, montrer que $\|X(t)\|$ est constante.

c) Si A est symétrique de valeurs propres $\leq -\alpha < 0$, montrer que $\|X(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\alpha t}\|X(0)\|$.

Exercice 10 – Formule de Trotter

Soient $A, B \in M_n(\mathrm{K})$, une norme d'algèbre, $X_n = \exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)$ et $Y_n = \exp\left(\frac{A+B}{n}\right)$.

a) Montrer que $\|X_n - Y_n\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $X_n^n - Y_n^n = \sum_{k=0}^{n-1} X_n^k (X_n - Y_n) Y_n^{n-1-k}$, et en déduire $\|X_n^n - Y_n^n\| \leq n\, \mathrm{e}^{\|A\| + \|B\|} \|X_n - Y_n\|$.

c) Conclure : $\left(\exp\frac{A}{n} \exp\frac{B}{n}\right)^n \to \exp(A+B)$.

Exercice 11 – Conjugaison par l'exponentielle

Soient A, B et $F(t) = \exp(tA) B \exp(-tA)$.

a) Montrer que $F'(t) = \exp(tA)[A,B]\exp(-tA)$, où $[A,B] = AB - BA$.

b) Si $[A,[A,B]] = 0$, montrer que $F(t) = B + t[A,B]$.

c) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 – L'exponentielle est un polynôme en A

a) Montrer que $\mathrm{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathrm{K}[X]\}$ est un sous-espace fermé de $M_n(\mathrm{K})$, et en déduire que $\exp(A) \in \mathrm{K}[A]$.

b) Expliciter un polynôme P de degré ≤ 1 tel que $\exp(A) = P(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Le polynôme P dépend-il de A ? Peut-on choisir le même P pour toutes les matrices ?

Exercice 13 – Oscillateur à amortissement critique

On considère $x' = y$, $y' = -x - 2y$ (soit $x'' + 2x' + x = 0$).

a) Écrire $A = -I + N$ et vérifier que $N^2 = 0$.

b) En déduire $\exp(tA)$.

c) Résoudre avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et étudier le signe de x.

Exercice 14 – L'exponentielle comme limite

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ et une norme d'algèbre.

a) Montrer que $\exp(A) - \left(I + \frac{A}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k} A^k + \sum_{k>n} \frac{A^k}{k!}$ avec $c_{n,k} = \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \geq 0$.

b) En déduire $\left\|\exp(A) - \left(I + \frac{A}{n}\right)^n\right\| \leq \mathrm{e}^{\|A\|} - \left(1 + \frac{\|A\|}{n}\right)^n$.

c) Conclure, et interpréter comme la méthode d'Euler pour $X' = AX$.

Exercice 15 – Synthèse : équation matricielle de Lyapunov

Soient $A, B, X_0 \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $X(t) = \exp(tA) X_0 \exp(tB)$ est l'unique solution de $X' = AX + XB$, $X(0) = X_0$ (pour l'unicité, dériver $\exp(-tA)X(t)\exp(-tB)$).

b) Si $B = A^{\mathsf{T}}$ et X_0 symétrique, montrer que $X(t)$ reste symétrique.

c) Soit $A = \mathrm{diag}(-1,-2)$. Calculer $S = \int_0^{+\infty} \exp(tA)\exp(tA^{\mathsf{T}})\,\mathrm{d}t$ et vérifier que $AS + SA^{\mathsf{T}} = -I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Pour cet exemple, montrer que $\int_0^{+\infty} \|\exp(tA)x\|^2 \,\mathrm{d}t = x^{\mathsf{T}} S x$ et interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).