Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : fonctions de matrices, chaînes de Markov et systèmes

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Une série entière $\sum a_k z^k$ de rayon R définit une **fonction de matrice** $f(A) = \sum a_k A^k$ dès que $\|A\| < R$ (racine carrée, logarithme, arc tangente, résolvante). On calcule $f(A)$ par les valeurs propres ($f(\lambda)$ sur chaque espace propre), par un polynôme annulateur, ou par la partie nilpotente (série **finie**). Les problèmes appliqués (chaînes de Markov, suites récurrentes, diffusion sur un graphe, oscillateurs forcés) se ramènent à A^n, $\sum A^n$ ou $\exp(tA)$, dont on étudie la limite ; on vérifie toujours les invariants (somme des probabilités, masse totale, déterminant).

Exercice 1 – Racine carrée d'une matrice unipotente

a) Soit N telle que $N^3 = 0$. Vérifier que $R = I + \frac{N}{2} - \frac{N^2}{8}$ vérifie $R^2 = I + N$.

b) En déduire une matrice X telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

Exercice 2 – Chaîne de Markov à deux états

Soit $a, b \in]0,1[$ et $P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$, $\Pi = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}$, $D = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $P = \Pi + (1-a-b)D$, $\Pi^2 = \Pi$, $D^2 = D$, $\Pi D = D\Pi = 0$, et en déduire P^n.

b) Montrer que $P^n \to \Pi$ et que $\sum_{n \geq 0} (P^n - \Pi)$ converge ; calculer sa somme.

c) Application : $a = 0{,}2$, $b = 0{,}3$.

Exercice 3 – Chaîne de Markov en temps continu

Soit $a, b > 0$ et $Q = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $Q^2 = -(a+b)Q$, et en déduire $\exp(tQ) = I + \frac{1 - \mathrm{e}^{-(a+b)t}}{a+b} Q$.

b) Montrer que $\exp(tQ)$ est stochastique pour tout $t \geq 0$ (coefficients ≥ 0, lignes de somme 1).

c) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} \exp(tQ)$.

Exercice 4 – Fibonacci par la résolvante

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et (F_n) la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$).

a) Montrer que $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ pour $n \geq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $|x|$ assez petit, montrer que $\sum_{n\geq 0} x^n A^n = (I - xA)^{-1}$ et calculer cette inverse.
c) En déduire $\sum_{n\geq 0} F_n x^n = \dfrac{x}{1-x-x^2}$, et préciser un domaine de validité.

Exercice 5 – Exponentielle des matrices symétriques

a) Montrer que exp envoie $S_n(\mathbb{R})$ dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est bijective (pour l'injectivité, comparer les espaces propres de A et de $\exp(A)$).
c) La trace de $\exp(A)$ est-elle toujours positive pour $A \in M_n(\mathbb{R})$?

Exercice 6 – Amplification transitoire d'un système stable

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\exp(tA)$ et montrer que $\exp(tA) \to 0$.
b) Étudier $g(t) = 10\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)$ et donner son maximum.
c) Interpréter : la solution issue de $(0,1)$ peut-elle dépasser, en norme, sa valeur initiale ?

Exercice 7 – Oscillateur forcé à la résonance

On considère $x' = -y + \cos t$, $y' = x$, avec $x(0) = y(0) = 0$ (soit $y'' + y = \cos t$).

a) Avec $\exp(tJ) = R_t$ (rotation), écrire la solution par la formule de variation de la constante.
b) Calculer x et y.
c) Vérifier, et décrire le comportement.

Exercice 8 – Exponentielles égales de nilpotentes qui commutent

Soient A, B nilpotentes qui commutent, avec $\exp(A) = \exp(B)$.

a) Montrer que $A - B$ est nilpotente.
b) Montrer que $\exp(A - B) = I$.
c) En déduire $A = B$ (utiliser le résultat : N nilpotente et $\exp(N) = I \Rightarrow N = 0$).

Exercice 9 – Formule du déterminant par densité

a) Montrer que $\det \exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ pour A diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.
b) On admet que les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \mapsto \exp(A)$ est continue.
c) Conclure pour toute $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 10 – Exponentielle d'une matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $M^k = \begin{pmatrix} A^k & A^{k-1}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour $k \geq 1$.

b) En déduire $\exp(tM) = \begin{pmatrix} \exp(tA) & \int_0^t \exp(sA)B\,\mathrm{d}s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Lien avec la solution de $X' = AX + B$, $X(0) = X_0$?

Exercice 11 – Arc tangente d'une matrice

Pour $\|A\| < 1$, on pose $\operatorname{Arctan}(A) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{2k+1}$.

a) Justifier la convergence.

b) Calculer $\operatorname{Arctan}(A)$ pour $A = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$, puis sa trace sous la forme $\arctan r$, r rationnel.

c) Calculer $\operatorname{Arctan}(N)$ pour $N^2 = 0$.

Exercice 12 – Coefficients non constants : l'exponentielle de l'intégrale échoue

Soit $A(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M(t) = \int_0^t A(s)\,\mathrm{d}s$.

a) Montrer que $A(s)A(t) \neq A(t)A(s)$ pour $s \neq t$.

b) Calculer $\exp(M(t))$ (montrer que $M^2 = \frac{t^2}{2}M$).

c) Résoudre $X' = A(t)X$ avec $X(0) = (0, 1)$, et comparer à $\exp(M(t))X(0)$ par un développement en $t = 0$.

Exercice 13 – Troncature de la série exponentielle

Soit une norme d'algèbre et $E_N(A) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$.

a) Montrer que $\|\exp(A) - E_N(A)\| \leq \frac{\|A\|^{N+1}}{(N+1)!} \mathrm{e}^{\|A\|}$.

b) Pour $\|A\| \leq 1$, quel N garantit une erreur $\leq 10^{-8}$?

c) Montrer que $\exp(A) = \left(\exp\left(2^{-s}A\right)\right)^{2^s}$, et expliquer l'intérêt de cette identité pour $\|A\| = 10$ (choisir s pour que $\|2^{-s}A\| \leq \frac{1}{2}$).

Exercice 14 – Fonction exponentielle et commutant

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que toute matrice qui commute avec A commute avec $\exp(A)$.

b) Montrer que la réciproque est fausse avec $A = 2i\pi\operatorname{diag}(1, 0)$.

c) Montrer que la réciproque est vraie si les valeurs propres de A sont deux à deux distinctes modulo $2i\pi$ et A diagonalisable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : diffusion sur un graphe

Trois cases alignées échangent de la chaleur avec leurs voisines : $X' = -LX$ avec $L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (laplacien du graphe).

a) Vérifier que $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-2,1)$ sont propres pour L, de valeurs propres 0, 1, 3.

b) En déduire $\exp(-tL)$ comme combinaison de projecteurs orthogonaux.

c) Résoudre avec $X(0) = (1,0,0)$ et vérifier la condition initiale.

d) Montrer que $x_1 + x_2 + x_3$ est constante et déterminer $\lim X(t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).