Plaquette 1 – Séries dans un Banach, convergence normale et exponentielle de matrices

Séries vectorielles — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On étudie une série à valeurs dans un espace normé complet : **convergence absolue** dans un Banach, séries de matrices, **exponentielle** $\exp(A)$ et ses propriétés, séries géométriques d'opérateurs.

Exercice 1 – Convergence absolue dans un Banach

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ avec $\|A\| = 0{,}4$. Montrer que $\sum_{k \geq 0} A^k$ converge et majorer sa norme.

Exercice 2 – Exponentielle d'une matrice diagonale

Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Exponentielle d'une nilpotente

Calculer $\exp(N)$ pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – Exponentielle et décomposition de Dunford

Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Non-commutation

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Exercice 6 – Exponentielle d'une rotation infinitésimale

Calculer $\exp(tJ)$ pour $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et interpréter.

Exercice 7 – Déterminant de l'exponentielle

Démontrer que $\det \exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}$ pour $A \in M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 8 – Résolution d'un système différentiel

Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Série de matrices

Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 10 – Convergence normale d'une série de fonctions à valeurs vectorielles

Soit $f_n(t) = \frac{t^n}{n^2}\begin{pmatrix} 1 \\ n \end{pmatrix}$ pour $t \in [0\,;1]$. La série $\sum f_n$ converge-t-elle normalement ?

Exercice 11 – Exponentielle et valeurs propres

Soit A de valeurs propres 0 et $\ln 2$. Que valent les valeurs propres de $\exp(A)$, sa trace et son déterminant ?

Exercice 12 – Le groupe linéaire est ouvert et l'inversion continue

On munit $M_n(\mathrm{K})$ d'une norme d'algèbre. Soit $A \in GL_n(\mathrm{K})$ et H telle que $\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

a) Montrer que $A + H = A(I + A^{-1}H)$ est inversible et que $(A+H)^{-1} = \sum_{k \geq 0} (-A^{-1}H)^k A^{-1}$.

b) En déduire que $GL_n(\mathrm{K})$ est ouvert.

c) Montrer que $\|(A+H)^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|H\|}{1 - \|A^{-1}\|\|H\|}$, et en déduire la continuité de $M \mapsto M^{-1}$.

Exercice 13 – Logarithme d'une matrice unipotente

Soit $N \in M_n(\mathrm{K})$ telle que $N^3 = 0$, et $L = N - \frac{N^2}{2}$.

a) Calculer L^2 et L^3.

b) Montrer que $\exp(L) = I + N$.

c) Application : trouver une matrice L telle que $\exp(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 – Convergence absolue sans convergence

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \max_k |a_k|$ si $P = \sum a_k X^k$.

a) Montrer que $\sum_{k \geq 0} \frac{X^k}{k!}$ est absolument convergente.

b) Montrer qu'elle ne converge pas dans $\mathbb{R}[X]$ (raisonner sur le degré d'une éventuelle limite P).

c) Qu'en déduit-on sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : système différentiel couplé

Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis interpréter la trajectoire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).