Plaquette 1 – Groupes, idéaux, anneaux quotients et corps finis

Structures algébriques — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On étudie les **sous-groupes engendrés** et l'ordre d'un élément, on manipule les **idéaux** de $\mathbb{Z}$ et de $\mathrm{K}[X]$, on utilise les **morphismes** et leurs noyaux, et on exploite la structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 1 – Ordre d'un élément et Lagrange

Soit G un groupe fini d'ordre 15 et $x \in G$ avec $x \neq e$. Quels sont les ordres possibles de x ?

Exercice 2 – Groupe d'ordre premier

Montrer que tout groupe G d'ordre p premier est cyclique.

Exercice 3 – Idéaux de Z

Déterminer $I = 6\mathbb{Z} + 10\mathbb{Z}$ et $J = 6\mathbb{Z} \cap 10\mathbb{Z}$.

Exercice 4 – Idéaux de K[X]

Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer l'idéal engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 - 3X + 2$.

Exercice 5 – Indicatrice d'Euler

Calculer $\varphi(36)$ et en déduire le reste de 5^{100} modulo 36.

Exercice 6 – Théorème chinois

Résoudre $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 7 \\ x \equiv 4 \pmod 9 \end{cases}$ et interpréter en termes d'isomorphisme d'anneaux.

Exercice 7 – Noyau et théorème d'isomorphisme

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*$, $z \mapsto |z|$. Déterminer $\ker f$ et en déduire un isomorphisme.

Exercice 8 – Sous-groupe distingué

Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes $f : G \to G'$ est un sous-groupe **distingué** de G.

Exercice 9 – Corps fini

Dans $\mathrm{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, déterminer l'ordre de $\overline{3}$ et montrer qu'il engendre le groupe multiplicatif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Anneau quotient de polynômes

Montrer que $\mathbb{R}[X]/\left(X^2+1\right)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

Exercice 11 – Groupe symétrique et signature

Décomposer $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ en cycles, puis calculer sa signature et son ordre.

Exercice 12 – Groupe des inversibles : cyclique ou non

On étudie le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

a) Pour $n = 9$, lister les éléments et calculer les puissances successives de $\overline{2}$. Le groupe est-il cyclique ?

b) Pour $n = 8$, montrer que tout élément vérifie $x^2 = \overline{1}$. Le groupe est-il cyclique ? À quel groupe est-il isomorphe ?

c) Pour $n = 15$, utiliser le théorème chinois pour montrer que $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\times$, et en déduire qu'il n'est pas cyclique.

Exercice 13 – Ordre d'un produit dans un groupe abélien

Soit G un groupe abélien (noté multiplicativement), a d'ordre m et b d'ordre n avec $m \wedge n = 1$.

a) Montrer que $(ab)^{mn} = e$.

b) Soit d l'ordre de ab. Montrer que $a^{dn} = e$ et en déduire $m \mid d$; de même $n \mid d$.

c) Conclure que ab est d'ordre mn.

d) Contre-exemple si $m \wedge n \neq 1$: dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, prendre $a = \overline{1}$ et $b = \overline{3}$.

Exercice 14 – Morphismes de Z/nZ dans Z/mZ

On cherche les morphismes de groupes $f : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

a) Montrer qu'un tel morphisme est déterminé par $f(\overline{1}) = \overline{a}$, et que $\overline{a}$ doit vérifier $n\overline{a} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

b) Réciproquement, montrer que si $m \mid na$, la formule $f(\overline{k}) = \overline{ka}$ définit bien un morphisme (indépendance du représentant).

c) En déduire qu'il y a exactement $n \wedge m$ morphismes. Application : $n = 12$, $m = 18$.

Exercice 15 – Synthèse : sous-groupes de Z/12Z

Déterminer tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$ et leurs ordres.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).