Plaquette 5 – Approximation uniforme et problèmes de synthèse

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Polynômes de Bernstein. Pour $f \in C([0,1])$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

avec $B_n(1) = 1$, $B_n(x) = x$, $B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$, et $B_n(f) \to f$ uniformément sur $[0,1]$.

Weierstrass. Les polynômes sont denses dans $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Découpage d'une intégrale. Pour montrer $\int g_n \to \ell$, on coupe en une partie où g_n converge uniformément et une partie de petite mesure où g_n est bornée.

Correction de l'exercice 1 – Polynômes de Bernstein des premiers monômes

a) Binôme avec $y = 1 - x$: $(x + 1 - x)^n = 1$.

b) $\sum_k k\binom{n}{k} x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$; on multiplie par $\frac{x}{n}$ et on prend $y = 1 - x$: $\sum_k \frac{k}{n} p_{n,k}(x) = x$.

c) En dérivant deux fois : $\sum_k k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} y^{n-k} = n(n-1)(x+y)^{n-2}$, d'où $\sum_k k(k-1)p_{n,k} = n(n-1)x^2$. Avec $k^2 = k(k-1) + k$:

$$\sum_k \frac{k^2}{n^2} p_{n,k}(x) = \frac{n(n-1)x^2 + nx}{n^2} = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Enfin $\sum_k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k} = \left(x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right) - 2x \cdot x + x^2 = \frac{x(1-x)}{n}$.

Réponse. $B_n(1) = 1$, $B_n(x) = x$, $B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$; variance $\sum (\frac{k}{n} - x)^2 p_{n,k} = \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{1}{4n}$.

Correction de l'exercice 2 – Le théorème de Weierstrass par Bernstein

a) $f(x) = \sum_k f(x) p_{n,k}(x)$ (somme des $p_{n,k}$ égale à 1), puis inégalité triangulaire, les $p_{n,k}$ étant positifs.

b) Pour $\left|\frac{k}{n} - x\right| \le \delta$: $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \le \varepsilon$, et ces termes contribuent au plus $\varepsilon \sum p_{n,k} \le \varepsilon$. Pour les autres, $|f(\frac{k}{n}) - f(x)| \le 2M \le 2M \frac{(k/n - x)^2}{\delta^2}$, d'où une contribution

$$\le \frac{2M}{\delta^2} \sum_k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x) = \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x(1-x)}{n} \le \frac{M}{2n\delta^2}$$

c) Pour $n \ge \frac{M}{2\varepsilon\delta^2}$, $\|B_n(f) - f\|_\infty \le 2\varepsilon$: $B_n(f) \to f$ uniformément. Par changement de variable affine, tout f continue sur $[a,b]$ est limite uniforme de polynômes.

Réponse. $\|B_n(f) - f\|_\infty \le \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}$: les polynômes de Bernstein convergent uniformément vers f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Une fonction dont tous les moments sont nuls

a) Linéarité de l'intégrale.

b) $\left|\int_0^1 fP_k - \int_0^1 f^2\right| \le \int_0^1 |f||P_k - f| \le \|f\|_\infty \|P_k - f\|_\infty \to 0$.

c) Les $\int fP_k$ sont nuls par a), donc

$$\int_0^1 f^2 = 0$$

et f^2 continue positive d'intégrale nulle est nulle : $f = 0$.

Réponse. Weierstrass : $\int f^2 = \lim \int fP_k = 0$, donc $f = 0$.

Correction de l'exercice 4 – La fonction de Takagi

a) $0 \le d \le \frac{1}{2}$, donc $\left\|\frac{d(2^n\cdot)}{2^n}\right\|_\infty \le 2^{-n-1}$: convergence normale, T continue (car d l'est), et $0 \le T \le \sum 2^{-n-1} = 1$. Chaque terme est 1-périodique.

b) $T(2x) = \sum_{n\ge 0} \frac{d(2^{n+1}x)}{2^n} = 2\sum_{n\ge 1} \frac{d(2^n x)}{2^n}$, d'où la relation. $T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}T(1) = \frac{1}{2}$. Pour $x = \frac{1}{3}$: $2^n/3$ est à distance $\frac{1}{3}$ de $\mathbb{Z}$ pour tout n, donc $T\left(\frac{1}{3}\right) = \sum \frac{1/3}{2^n} = \frac{2}{3}$.

c) Pour $n < m$, $2^{n-m} \in \left]0, \frac{1}{2}\right]$ donc $d(2^{n-m}) = 2^{n-m}$; pour $n \ge m$, $d(2^{n-m}) = 0$. Ainsi

$$T(2^{-m}) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2^{n-m}}{2^n} = m2^{-m}, \qquad \frac{T(2^{-m}) - T(0)}{2^{-m}} = m \longrightarrow +\infty$$

Le taux d'accroissement en 0 n'est pas borné : T n'est pas dérivable en 0 (et l'on montre qu'elle n'est dérivable nulle part).

Réponse. T continue (normale), $T(x) = d(x) + \frac{1}{2}T(2x)$, $T(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, taux d'accroissement m en 2^{-m} : non dérivable en 0.

Correction de l'exercice 5 – Une équation fonctionnelle résolue par une série

a) $\left\|\frac{\cos(2^n\cdot)}{2^n}\right\|_\infty = 2^{-n}$: normale, F continue et $|F| \le 2$. Puis

$$F(x) - \frac{1}{2}F(2x) = \sum_{n\ge 0} \frac{\cos(2^n x)}{2^n} - \sum_{n\ge 0} \frac{\cos(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} = \cos x$$

b) Par récurrence $g(x) = 2^{-k}g(2^k x)$, donc $|g(x)| \le 2^{-k}\|g\|_\infty \to 0$. La différence de deux solutions bornées vérifie cette relation : la solution est unique.

c) $F(0) = \sum 2^{-n} = 2$; $F(\pi) = \cos\pi + \sum_{n\ge 1} \frac{\cos(2^n\pi)}{2^n} = -1 + 1 = 0$.

Réponse. $F(x) = \sum \frac{\cos(2^n x)}{2^n}$ est l'unique solution continue bornée ; $F(0) = 2$, $F(\pi) = 0$.

Correction de l'exercice 6 – Second théorème de Dini

a) Les inégalités larges $f_n(x) \le f_n(y)$ ($x \le y$) passent à la limite.

b) Nombre fini de points : on prend N maximal parmi les rangs associés à chaque x_j.

c) Par croissance de f_n et de f, pour $n \ge N$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f(x) - 2\varepsilon \le f(x_j) - \varepsilon \le f_n(x_j) \le f_n(x) \le f_n(x_{j+1}) \le f(x_{j+1}) + \varepsilon \le f(x) + 2\varepsilon$$

donc $\|f_n - f\|_\infty \le 2\varepsilon$: convergence uniforme. (Sans continuité de f, c'est faux : x^n sur $[0,1]$.)

Réponse. Subdivision adaptée à f et monotonie : $\|f_n - f\|_\infty \le 2\varepsilon$.

Correction de l'exercice 7 – Sinus itéré de fonctions

a) $|f_1| = |\sin x| \le 1 = u_0$. Si $|f_{n+1}| \le u_n \le 1$, alors, sin étant croissante et impaire sur $[-1,1]$,

$$|f_{n+2}(x)| = |\sin f_{n+1}(x)| \le \sin u_n = u_{n+1}$$

b) $u_n \to 0$, donc $\|f_n\|_\infty \to 0$, avec $\|f_n\|_\infty \le u_{n-1} \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$; c'est optimal car $f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_{n-1}$.

c) $\|f_0\|_\infty = +\infty$ ($f_0 = \mathrm{id}$), mais dès $n = 1$ toutes les fonctions sont bornées par 1 : la convergence uniforme concerne la queue de la suite.

Réponse. $\|f_n\|_\infty = u_{n-1} \sim \sqrt{\frac{3}{n}} \to 0$: convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8 – Limite de l'intégrale de f de x puissance n

a) Sur $[0, 1-\delta]$, $x^n \le (1-\delta)^n \to 0$: pour $n \ge N$, $(1-\delta)^n \le \eta$.

b) On découpe :

$$\left|\int_0^1 (f(x^n) - f(0))\,\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{1-\delta} |f(x^n) - f(0)|\,\mathrm{d}x + \int_{1-\delta}^1 2\|f\|_\infty\,\mathrm{d}x \le \varepsilon + 2\|f\|_\infty\delta$$

c) On choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty + 1}$, puis $n \ge N$: l'écart est $\le 2\varepsilon$. Donc $\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \to f(0)$; par exemple $\int_0^1 \cos(x^n)\,\mathrm{d}x \to \cos 0 = 1$.

Réponse. Découpage $[0, 1-\delta] \cup [1-\delta, 1]$: $\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \to f(0)$; ici 1.

Correction de l'exercice 9 – Une approximation de l'unité

a) $(n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = 1$.

b) $I_n - f(1) = (n+1)\int_0^1 x^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x$ par a). Soit $\varepsilon > 0$ et δ tel que $|f(x) - f(1)| \le \varepsilon$ sur $[1-\delta, 1]$:

$$|I_n - f(1)| \le 2\|f\|_\infty(n+1)\int_0^{1-\delta} x^n\,\mathrm{d}x + \varepsilon = 2\|f\|_\infty(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon$$

qui est $\le 2\varepsilon$ pour n grand.

c) $\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \frac{I_n}{n+1} \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$: la masse de $(n+1)x^n$ se concentre en 1.

Réponse. $(n+1)\int_0^1 x^n f \to f(1)$; $\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \sim \frac{\mathrm{e}}{n}$.

Correction de l'exercice 10 – Périodisation d'une gaussienne

a) Pour $|x| \le A$ et $|n| \ge 2A$: $|x - n| \ge |n| - A \ge \frac{|n|}{2}$, donc

$$\mathrm{e}^{-(x-n)^2} \le \mathrm{e}^{-n^2/4}$$

terme d'une série convergente (sur $\mathbb{Z}$, sommée par $|n|$ croissant) : convergence normale sur $[-A, A]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Continuité sur chaque $[-A, A]$, donc sur $\mathbb{R}$. Changer x en $x+1$ revient à décaler l'indice $n \mapsto n-1$, ce qui ne change pas la somme (famille sommable).

c) Les dérivées $-2(x-n)\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$ sont majorées sur $[-A, A]$ par $|n| \cdot 3\,\mathrm{e}^{-n^2/4}$ pour $|n| \geq 2A$ (car $|x-n| \leq \frac{3}{2}|n|$) : convergence normale, $F \in C^1$. F est paire (changer n en $-n$), donc $F'(0) = 0$.

Réponse. Normale sur tout segment : F continue, 1-périodique, C^1, paire, $F'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 11 – Lemme d'Abel pour des coefficients positifs

a) $|a_n x^n| \leq a_n$ sur $[0,1]$: normale, la somme est continue sur $[0,1]$, d'où la limite $\sum a_n$ en 1.

b) Pour N fixé, $f(x) \geq \sum_{n \leq N} a_n x^n \to \sum_{n \leq N} a_n$ quand $x \to 1^-$; donc

$$\liminf_{x \to 1^-} f(x) \geq \sum_{n=0}^{N} a_n$$

pour tout N, et le membre de droite tend vers $+\infty$.

c) $\sum \frac{x^n}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6}$; $\sum \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \to +\infty$, conformément à b).

Réponse. Coefficients positifs : $f(x) \to \sum a_n$ (finie ou $+\infty$) quand $x \to 1^-$.

Correction de l'exercice 12 – Limite uniforme de fonctions uniformément continues

a) « $\varepsilon/3$ » : soit N avec $\|f_N - f\|_\infty \leq \varepsilon$, puis δ adapté à f_N ; pour $|x-y| \leq \delta$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \leq 3\varepsilon$$

b) Les sommes partielles sont des combinaisons finies de $x \mapsto \sin(nx)$, lipschitziennes, donc uniformément continues ; la convergence est normale ($\frac{1}{n^3}$), donc uniforme : a) s'applique. Autre preuve : la série dérivée $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge normalement, f est C^1 avec $|f'| \leq \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donc f est $\frac{\pi^2}{6}$-lipschitzienne.

c) Non : $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ est uniformément continue (Heine), de limite simple discontinue.

Réponse. La limite uniforme préserve l'uniforme continuité ($\varepsilon/3$) ; la limite simple non (x^n).

Correction de l'exercice 13 – Une série trigonométrique sommée explicitement

a) Normale (2^{-n}). $\sum \left(\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{ix}/2}$ (raison de module $\frac{1}{2}$), et l'on prend la partie réelle terme à terme.

b) $\frac{1}{1 - z/2}$ avec $z = \mathrm{e}^{ix}$: on multiplie par le conjugué,

$$\mathrm{Re}\frac{1 - \overline{z}/2}{|1 - z/2|^2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\cos x}{1 - \cos x + \frac{1}{4}} = \frac{1 - \frac{1}{2}\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x}$$

c) $\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ pour $n \geq 1$ et π pour $n = 0$: $\int_0^\pi f = \pi$ (intégrale peu évidente à calculer directement).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f(x) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}\cos x}{\frac{5}{4} - \cos x}$ et $\int_0^{\pi} f = \pi$.

Correction de l'exercice 14 – Une fonction non approchable par des polynômes

a) Si $\|P_n - f\|_{\infty,\,]0,\,1]} \leq 1$ pour $n \geq N$, alors $|f| \leq |P_N| + 1$ sur $]0, 1]$, et P_N est borné sur $[0, 1]$ (continu sur un compact).

b) $\frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $]0, 1]$.

c) Oui sur $[a, 1]$: $\frac{1}{x}$ y est continue, Weierstrass s'applique. Sur $]0, 1]$, l'intervalle n'est pas un segment (pas compact) : le théorème ne vaut que sur les segments, et une limite uniforme de polynômes sur $]0, 1]$ se prolonge même par continuité en 0 (critère de Cauchy uniforme).

Réponse. Limite uniforme de polynômes sur $]0, 1]$: bornée ; $\frac{1}{x}$ ne l'est pas. Weierstrass exige un segment.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : Bernstein de l'exponentielle

a) Binôme : $\sum_k \binom{n}{k} \mathrm{e}^{k/n} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_k \binom{n}{k} (x\mathrm{e}^{1/n})^k (1-x)^{n-k}$.

b) $n(\mathrm{e}^{1/n} - 1) = 1 + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $nu = x + O\left(\frac{1}{n}\right)$ uniformément, et $0 \leq nu - n\ln(1+u) \leq \frac{nu^2}{2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ car $u = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) $B_n(f)(x) = \mathrm{e}^{x + r_n(x)}$ avec $\|r_n\|_\infty = O\left(\frac{1}{n}\right)$, et $|\mathrm{e}^{x+r} - \mathrm{e}^x| \leq \mathrm{e}^{1+|r|}|r|$:

$$\|B_n(f) - f\|_\infty = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

d) Taylor : erreur $\leq \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$, bien plus petite. Les polynômes de Bernstein convergent pour toute fonction continue, mais lentement ; ils sont surtout un outil théorique (et de conception graphique : courbes de Bézier).

Réponse. $B_n(\exp)(x) = (1 - x + x\mathrm{e}^{1/n})^n$, erreur $O(\frac{1}{n})$, contre $\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$ pour Taylor.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).