Plaquette 1 – Convergence simple, uniforme, normale et théorèmes de passage à la limite

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modes de convergence.

— **Simple** : pour chaque x fixé, $f_n(x) \to f(x)$.

— **Uniforme** sur A : $\sup_{x\in A}|f_n(x)-f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

— **Normale** (séries) : $\sum_n \sup_{x\in A}|u_n(x)| < +\infty$.

Implications : **normale ⇒ uniforme ⇒ simple**. Les réciproques sont fausses.

Théorèmes de passage à la limite (hypothèse : convergence **uniforme**).

— **Continuité** : si les f_n sont continues et $f_n \to f$ **uniformément**, alors f est **continue**.

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x)$$

— **Intégration sur un segment** : si $f_n \to f$ uniformément sur $[a\,;b]$, alors

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

— **Dérivation** : si f_n est C^1, $f_n(x_0)$ converge et f_n' converge **uniformément** vers g, alors f_n converge uniformément vers une fonction f de classe C^1 avec $f' = g$. **C'est la convergence des dérivées qui compte.**

Convergence dominée (hors segment, version séries/intégrales) : si $|f_n| \le \varphi$ intégrable et $f_n \to f$ simplement, alors $\int f_n \to \int f$.

Critère pratique. Pour majorer $\sup|f_n - f|$, on étudie souvent la fonction $g_n = f_n - f$ (dérivée, tableau de variations) ou l'on trouve une suite de points x_n où l'écart ne tend pas vers 0 (pour **nier** l'uniformité).

Correction de l'exercice 1 – Convergence simple sans uniformité

Limite simple.

— Pour $x \in [0\,;1[$: $x^n \to 0$.

— Pour $x = 1$: $f_n(1) = 1$.

— Donc $f(x) = 0$ si $x < 1$, $f(1) = 1$ — la limite est **discontinue**.

Convergence uniforme.

— Si elle avait lieu, la limite d'une suite de fonctions continues serait continue : **contradiction**.

— **Preuve directe** : $\sup_{[0;1]}|f_n - f| \ge \left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}368 \neq 0$.

— **Conclusion** : convergence simple mais **pas uniforme** sur $[0\,;1]$.

— **Sur** $[0\,;a]$ **avec** $a < 1$: $\sup|f_n| = a^n \to 0$ — la convergence **est** uniforme. Le défaut est **localisé au voisinage de** 1.

Réponse. Simple vers une limite discontinue ; pas uniforme sur $[0\,;1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Convergence uniforme

Limite simple : pour x fixé, $f_n(x) \to 0$ (le dénominateur tend vers $+\infty$ si $x \neq 0$; et $f_n(0) = 0$).

Étude du sup. On maximise $|f_n|$; par imparité on se restreint à $x > 0$.

— $f_n'(x) = \dfrac{(1+nx^2) - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$, qui s'annule en $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

— **Maximum** : $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = \dfrac{1/\sqrt{n}}{2} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

— Donc $\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$: la convergence est **uniforme** sur $\mathbb{R}$.

— **Contrôle** : $n = 100$ donne un écart maximal de 0,05 ✓

— **Méthode** : quand un maximum « se déplace », le calculer explicitement est la voie la plus sûre.

Réponse. Uniforme vers 0 : $\sup |f_n| = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \to 0$.

Correction de l'exercice 3 – Interversion limite-intégrale

Limite simple : pour $x \in]0\,;1]$, $(1-x)^n$ décroît géométriquement, donc $f_n(x) \to 0$ (croissances comparées). Et $f_n(0) = 0$. Donc $f = 0$ et $\int_0^1 f = 0$.

Calcul de l'intégrale. Le changement $u = 1 - x$ donne

$$\int_0^1 nx(1-x)^n \mathrm{d}x = n\int_0^1 (1-u)u^n \mathrm{d}u = n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)}$$

— Cette quantité tend vers 0… donc ici **les deux limites coïncident**.

— **Vérification de l'uniformité** : le maximum de f_n est atteint en $x = \dfrac{1}{n+1}$ et vaut $\dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \mathrm{e}^{-1}$ — la convergence **n'est pas uniforme**.

— **Leçon** : l'interversion peut réussir **sans** convergence uniforme (c'est une condition **suffisante**, pas nécessaire). Avec $n^2x(1-x)^n$ à la place, l'intégrale tendrait vers $1 \neq 0$: l'interversion échouerait.

Réponse. Les deux valent 0, bien que la convergence ne soit pas uniforme.

Correction de l'exercice 4 – Convergence normale

— **Majoration uniforme** : $\left|\dfrac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— Donc $\sup_{\mathbb{R}} |u_n| = \dfrac{1}{n^2}$ (le sup est atteint quand $|\sin nx| = 1$).

— $\sum \dfrac{1}{n^2}$ **converge** (Riemann) : la série converge **normalement** sur $\mathbb{R}$.

— **Conséquences** : la convergence est **uniforme**, et la somme S est **continue** sur $\mathbb{R}$ (somme uniforme de fonctions continues).

— **Périodicité** : S est 2π-périodique et **impaire** ; c'est une série de Fourier.

— **Dérivation ?** La série des dérivées est $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n}$, qui ne converge **pas** normalement — on ne peut pas dériver terme à terme sans étude supplémentaire.

Réponse. Convergence normale sur $\mathbb{R}$; somme continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Convergence uniforme sans normalité

Pas de convergence normale.

— $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{(-1)^n}{n + x^2} \right| = \frac{1}{n}$ (atteint en $x = 0$), et $\sum \frac{1}{n}$ **diverge**.

Convergence uniforme. Pour x fixé, la série est **alternée** avec $a_n(x) = \frac{1}{n + x^2}$ positive, décroissante en n, tendant vers 0.

— Le **critère spécial** s'applique : la série converge, et le reste vérifie

$$|R_N(x)| \leq a_{N+1}(x) = \frac{1}{N + 1 + x^2} \leq \frac{1}{N + 1}$$

— Cette majoration est **indépendante de** x : $\sup_{\mathbb{R}} |R_N| \leq \frac{1}{N+1} \to 0$.

— **Conclusion** : convergence **uniforme** sans convergence normale.

— **Leçon** : la majoration du **reste** par le critère des séries alternées est l'outil de référence pour obtenir l'uniformité quand la normalité échoue.

Réponse. Reste $\leq \frac{1}{N+1}$ (séries alternées) ; $\sup |u_n| = \frac{1}{n}$ non sommable.

Correction de l'exercice 6 – Continuité de la somme

— **Majoration** : $0 < \frac{1}{n^2 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout x.

— $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série converge **normalement** sur $\mathbb{R}$: S est **définie** partout.

— Chaque terme $x \mapsto \frac{1}{n^2 + x^2}$ est **continu** sur $\mathbb{R}$.

— La convergence normale entraînant la convergence uniforme, le **théorème de continuité** s'applique : S est **continue** sur $\mathbb{R}$.

— **Propriétés supplémentaires** : S est **paire**, décroissante sur $\mathbb{R}^+$, et $S(0) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$.

— **Limite en** $+\infty$: par convergence dominée (ou majoration du reste), $S(x) \to 0$.

Réponse. Convergence normale sur $\mathbb{R}$ (majoration par $\frac{1}{n^2}$) : S continue.

Correction de l'exercice 7 – Dérivation terme à terme

Convergence de la série. Sur $[a\,; +\infty[$, $\left| \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$: convergence **normale**.

Série des dérivées. $u_n'(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

— Sur $[a\,; +\infty[$: $|u_n'(x)| \leq \frac{\mathrm{e}^{-na}}{n} \leq \mathrm{e}^{-na} = (\mathrm{e}^{-a})^n$.

— Comme $a > 0$, $\mathrm{e}^{-a} < 1$: c'est une **série géométrique convergente**, donc convergence **normale** de $\sum u_n'$.

— **Théorème de dérivation** : S est de classe C^1 sur $[a\,; +\infty[$ et

$$S'(x) = -\sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = \ln(1 - \mathrm{e}^{-x})$$

— en reconnaissant $\sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} = -\ln(1 - t)$ avec $t = \mathrm{e}^{-x} \in]0\,; 1[$.

— **Contrôle** : S' est négative, donc S est **décroissante** — cohérent, chaque terme décroît en x ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Point clé** : $a > 0$ est **indispensable** ; en 0 la série des dérivées diverge (série harmonique).

Réponse. $S'(x) = \ln(1 - e^{-x})$ sur $]0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 8 – Théorème de la double limite

— **Premier ordre** : pour n fixé, $\lim_{x\to 0^+} f_n(x) = 0$, donc la première limite double vaut 0.

— **Second ordre** : pour $x > 0$ fixé, $f_n(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{nx} + 1} \to 1$, donc $\lim_{x\to 0^+} 1 = 1$.

— **Les deux limites diffèrent** : $0 \neq 1$.

— **Explication** : le théorème de la double limite exige la convergence **uniforme**, qui fait ici défaut. En effet, pour $x_n = \dfrac{1}{n}$: $f_n(x_n) = \dfrac{1}{2}$, alors que la limite simple vaut 1 — l'écart ne tend pas vers 0.

— **Localisation du défaut** : sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$, la convergence **est** uniforme ($\sup|f_n - 1| = \dfrac{1}{1+na} \to 0$) ; le problème est concentré au voisinage de 0.

— **Morale** : intervertir deux limites n'est **jamais** automatique.

Réponse. 0 et 1 : on ne peut pas intervertir (pas de convergence uniforme).

Correction de l'exercice 9 – Convergence dominée

Limite simple : pour $x \in]0\,;1]$ fixé, $\dfrac{nx}{1+n^2x^3} \sim \dfrac{nx}{n^2x^3} = \dfrac{1}{nx^2} \to 0$. Et la valeur en 0 est nulle.

Domination. Par l'inégalité $1 + u^2 \geq 2u$ appliquée à $u = nx^{3/2}$:

$$0 \leq \frac{nx}{1+n^2x^3} \leq \frac{nx}{2nx^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

— La fonction $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est **intégrable** sur $]0\,;1]$ (d'intégrale 1), et la majoration est **indépendante de** n.

— **Théorème de convergence dominée** : l'intégrale tend vers $\int_0^1 0 = 0$.

— **Contrôle numérique** : pour $n = 100$, l'intégrale vaut environ 0,25 ; pour $n = 1000$, environ 0,12 — décroissance lente mais nette vers 0 ✓

— **Pourquoi la domination est nécessaire** : la convergence n'est pas uniforme (le maximum de l'intégrande vaut $\dfrac{n^{1/3}}{\text{const}} \to +\infty$), le théorème sur les segments ne s'applique pas.

Réponse. La limite vaut 0 (convergence dominée par $\frac{1}{2\sqrt{x}}$).

Correction de l'exercice 10 – Approximation uniforme

— **Limite simple** : $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \to \sqrt{x^2} = |x|$.

— **Majoration de l'écart** : on utilise la quantité conjuguée,

$$0 \leq f_n(x) - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

— Cette majoration est **indépendante de** x, donc $\sup_{\mathbb{R}} |f_n - |\cdot|| \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0$: convergence **uniforme**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Fait remarquable** : chaque f_n est de classe C^∞, mais la limite $|x|$ n'est **pas dérivable** en 0.
— **Leçon** : la convergence uniforme préserve la **continuité**, mais **pas** la dérivabilité — pour celle-ci, il faut la convergence uniforme des **dérivées** (qui échoue ici : $f_n'(0) = 0$ alors que le taux de $|x|$ oscille entre -1 et 1).

Réponse. $\sup |f_n - |x|| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$: convergence uniforme.

Correction de l'exercice 11 – Série entière et rayon

— **Majoration uniforme** sur $[-A\,;A]$: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| \le \frac{A^n}{n!}$.
— La série numérique $\sum \frac{A^n}{n!}$ **converge** (elle vaut e^A) : convergence **normale** sur $[-A\,;A]$.
— **Conséquences** : la somme, qui vaut e^x, est **continue** sur tout segment, donc sur $\mathbb{R}$.
— **Dérivation** : la série des dérivées est $\sum_{n \ge 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$, la **même série** — elle converge aussi normalement sur tout segment.
— On retrouve ainsi $(e^x)' = e^x$ ✓
— **Attention** : la convergence n'est **pas** normale sur $\mathbb{R}$ tout entier ($\sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{x^n}{n!}\right| = +\infty$) ; la convergence normale **sur tout segment** est la bonne formulation.

Réponse. Convergence normale sur tout segment $[-A\,;A]$; somme e^x.

Correction de l'exercice 12 – Convergence uniforme sur tout segment mais pas sur la droite

a) Pour x fixé et $n > |x|$, $n \ln(1 + \frac{x}{n}) = x + O\left(\frac{1}{n}\right) \to x$.

b) Pour $u = \frac{x}{n} \in [0,1]$, on a $u - \frac{u^2}{2} \le \ln(1+u) \le u$, donc

$$e^{x - \frac{x^2}{2n}} \le f_n(x) \le e^x, \qquad 0 \le e^x - f_n(x) \le e^x\left(1 - e^{-\frac{x^2}{2n}}\right) \le e^x \frac{x^2}{2n}$$

(car $1 - e^{-v} \le v$). Sur $[0,A]$, la borne $\frac{A^2 e^A}{2n}$ tend vers 0.

c) Non : en $x = n$, $e^n - f_n(n) = e^n - 2^n \to +\infty$, donc $\sup_{[0,+\infty[} |e^x - f_n(x)| = +\infty$.

Réponse. Convergence uniforme sur tout $[0,A]$ (erreur $\le \frac{A^2 e^A}{2n}$), mais pas sur $[0,+\infty[$ ($e^n - 2^n \to \infty$).

Correction de l'exercice 13 – La fonction zêta de Riemann

a) Pour $x \ge a$, $0 < \frac{1}{n^x} \le \frac{1}{n^a}$, et $\sum \frac{1}{n^a}$ converge : convergence normale sur $[a,+\infty[$, donc ζ est continue sur chaque $[a,+\infty[$, donc sur $]1,+\infty[$.

b) Comparaison série-intégrale ($t \mapsto t^{-x}$ décroissante) :

$$\zeta(x) \ge \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{x-1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} +\infty$$

Si la convergence était uniforme sur $]1,+\infty[$, le reste $R_1(x) = \zeta(x) - 1$ serait borné pour x proche de 1 (car $\sup|R_N| \to 0$ et $\zeta - R_N$ est une somme finie bornée) : contradiction.

c) Sur $[2,+\infty[$, convergence normale et chaque terme a une limite (1 pour $n = 1$, 0 sinon) : par le théorème de la double limite, $\zeta(x) \to 1$.

Réponse. ζ continue sur $]1,+\infty[$ (normale sur $[a,+\infty[$), $\zeta(x) \ge \frac{1}{x-1}$, $\zeta(x) \to 1$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Équivalent d'une somme de série en zéro

a) Pour $x \geq a > 0$, $\frac{1}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2a^2}$: convergence normale sur $[a, +\infty[$, donc continuité.

b) $t \mapsto \frac{1}{1+t^2x^2}$ décroît sur $[0, +\infty[$, donc $\int_n^{n+1} \leq \frac{1}{1+n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n}$. En sommant pour $n \geq 1$, avec $\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2} = \frac{\arctan(tx)}{x}$:

$$\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) \leq S(x) \leq \frac{1}{x} \cdot \frac{\pi}{2}$$

c) $\arctan x \to 0$ en 0 : les deux bornes sont équivalentes à $\frac{\pi}{2x}$. En $+\infty$:
$0 \leq S(x) \leq \frac{1}{x^2}\sum \frac{1}{n^2} \to 0$.

Réponse. S continue sur $]0, +\infty[$, $S(x) \sim \frac{\pi}{2x}$ en 0^+, $S(x) \to 0$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète

a) - **Sur** $[0\,;a]$**,** $a < 1$: $\left|\frac{x^n}{n}\right| \leq a^n$, série géométrique : convergence **normale**.

— **En** $x = 1$: la série est $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, **alternée** avec $\frac{1}{n}$ décroissante vers 0 — elle converge (critère spécial), mais **pas absolument**.
— **Uniformité sur** $[0\,;1]$: le critère des séries alternées s'applique pour chaque x, et le reste est majoré par $\frac{x^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$ — uniformément. La convergence est donc **uniforme sur** $[0\,;1]$, sans être normale.

b) **Sur** $[0\,;1[$: on part de $\frac{1}{1+t} = \sum_{n \geq 0}(-1)^n t^n$, qu'on intègre terme à terme de 0 à x (licite, convergence normale sur $[0\,;x]$) :

$$\ln(1+x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = S(x)$$

En $x = 1$: la convergence uniforme sur $[0\,;1]$ rend S **continue** en 1, donc

$$S(1) = \lim_{x \to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2 \approx 0{,}693$$

— **Contrôle numérique** : $1 - 0{,}5 + 0{,}333 - 0{,}25 + 0{,}2 = 0{,}783$ après 5 termes ; après 100 termes, $\approx 0{,}6882$ — convergence lente vers $\ln 2$ ✓
— **Ce que l'exercice illustre** : la convergence uniforme jusqu'au **bord** permet de prolonger une identité obtenue à l'intérieur (théorème d'Abel radial).

Réponse. b) $S(x) = \ln(1+x)$, et $S(1) = \ln 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).