Plaquette 2 – Convergence uniforme des suites de fonctions : méthodes et contre-exemples

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Norme uniforme. $f_n \to f$ uniformément sur $A \Leftrightarrow$

$$\|f_n - f\|_{\infty,A} = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Nier l'uniformité. Il suffit de trouver $x_n \in A$ avec $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq c > 0$.

Ce que préserve la limite uniforme. Continuité ; intégrale sur un segment. **Pas** : la dérivabilité, l'intégrale sur un intervalle non borné.

Ce que préserve déjà la limite simple. Monotonie, convexité, inégalités larges, caractère k-lipschitzien.

Correction de l'exercice 1 – Une bosse qui se déplace

a) $f_n(0) = 0$; pour $x > 0$, $nx\,\mathrm{e}^{-nx} \to 0$ (croissances comparées). Limite simple nulle.

b) $f_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-nx}(1 - nx)$: maximum en $x = \frac{1}{n}$, et

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}^{-1} \longrightarrow 0$$

Pas de convergence uniforme sur $[0, +\infty[$: la bosse de hauteur e^{-1} se déplace vers 0.

c) Pour $n \geq \frac{1}{a}$, f_n est décroissante sur $[a, +\infty[$ (car $a \geq \frac{1}{n}$), donc $\sup_{[a,+\infty[} f_n = na\,\mathrm{e}^{-na} \to 0$.

Réponse. $\|f_n\|_\infty = \mathrm{e}^{-1}$: pas uniforme sur $[0, +\infty[$; uniforme sur $[a, +\infty[$.

Correction de l'exercice 2 – Deux suites voisines

a) $g_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$: maximum en $x_n = \frac{n}{n+1}$, et

$$\|g_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{\mathrm{e}\,n} \longrightarrow 0$$

b) Pour $x \in [0, 1[$, $nx^n \to 0$, et $h_n(1) = 0$. Mais $\|h_n\|_\infty = n\|g_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \mathrm{e}^{-1}$.

c) $\int_0^1 h_n = n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \to 0 = \int_0^1 0$. L'interversion limite-intégrale a lieu sans convergence uniforme : celle-ci est suffisante, pas nécessaire.

Réponse. $\|g_n\|_\infty \sim \frac{1}{\mathrm{e}n}$; $\|h_n\|_\infty \to \mathrm{e}^{-1}$ mais $\int h_n \to 0$ quand même.

Correction de l'exercice 3 – Convergence uniforme sans convergence des dérivées

a) $|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout x :

$$\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0$$

b) $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$, donc $f_n'(0) = \sqrt{n} \to +\infty$: la suite des dérivées ne converge pas, même simplement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) La convergence uniforme des f_n ne dit rien des dérivées. Le théorème de dérivation exige la convergence uniforme des **dérivées** f_n' (et la convergence de f_n en un point) ; ici la limite 0 est dérivable, mais $f'(0) = 0 \neq \lim f_n'(0)$.

Réponse. $\|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, mais $f_n'(0) = \sqrt{n} \to \infty$: il faut la convergence uniforme des dérivées.

Correction de l'exercice 4 – Limite simple discontinue

a) Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $0 \leq \sin x < 1$ donc $\sin^n x \to 0$; en $\frac{\pi}{2}$, $f_n = 1$. Donc $f = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

b) Les f_n sont continues ; une limite uniforme de fonctions continues est continue ; or f est discontinue en $\frac{\pi}{2}$. Donc pas de convergence uniforme.

c) Sur $[0, a]$, sin croît, donc

$$\sup_{[0,\,a]} |f_n| = \sin^n a \longrightarrow 0$$

car $0 \leq \sin a < 1$.

Réponse. Limite discontinue en $\frac{\pi}{2}$: pas uniforme ; uniforme sur $[0, a]$, $a < \frac{\pi}{2}$ ($\sup = \sin^n a$).

Correction de l'exercice 5 – Quand l'intégrale ne passe pas à la limite

a) $f_n(0) = 0$; pour $x \in]0, 1]$, $0 \leq 1 - x < 1$ et $n^2(1-x)^n \to 0$ (croissances comparées).

b) Avec $u = 1 - x$:

$$\int_0^1 f_n = n^2 \int_0^1 (1-u)u^n \,\mathrm{d}u = n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 1$$

c) Maximum en $x = \frac{1}{n+1}$: $\|f_n\|_\infty = \frac{n^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim \frac{n}{\mathrm{e}} \to +\infty$. La limite des intégrales (1) diffère de l'intégrale de la limite (0) : la convergence n'est pas uniforme (et pas dominée).

Réponse. $\int_0^1 f_n \to 1 \neq 0$; $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n}{\mathrm{e}}$.

Correction de l'exercice 6 – Arc tangente accélérée

a) $f(x) = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $f(0) = 0$, $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

b) Non sur $\mathbb{R}$: f est discontinue en 0. Non plus sur $]0, +\infty[$: avec $x_n = \frac{1}{n}$, $f(x_n) - f_n(x_n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \not\to 0$.

c) Pour $x > 0$, $\frac{\pi}{2} - \arctan(nx) = \arctan\frac{1}{nx}$, décroissante en x :

$$\sup_{[a,\,+\infty[} |f - f_n| = \arctan\frac{1}{na} \leq \frac{1}{na} \longrightarrow 0$$

Réponse. Limite $\pm\frac{\pi}{2}$ (et 0 en 0) ; pas uniforme sur $]0, +\infty[$; sur $[a, +\infty[$, écart $\leq \frac{1}{na}$.

Correction de l'exercice 7 – Composition et produit de limites uniformes

a) Pour $\varepsilon > 0$, soit δ tel que $|u - v| \leq \delta \Rightarrow |g(u) - g(v)| \leq \varepsilon$, puis N tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \delta$ pour $n \geq N$. Alors $|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon$ pour tout x.

b) $f_n \to f = \mathrm{id}$ uniformément ($\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}$), mais

$$f_n(x)^2 - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

n'est pas borné en x : pas de convergence uniforme. Ici $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.

c) $f_n g_n - fg = (f_n - f)g_n + f(g_n - g)$, et $\|g_n\|_\infty \le \|g\|_\infty + 1$ pour n grand : $\|f_n g_n - fg\|_\infty \le \|f_n - f\|_\infty(\|g\|_\infty + 1) + \|f\|_\infty\|g_n - g\|_\infty \to 0$.

Réponse. Composition par g uniformément continue et produit de limites bornées : uniforme ; contre-exemple $(x + \frac{1}{n})^2$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8 – Limite uniforme de polynômes sur la droite

a) Critère de Cauchy uniforme : il existe N tel que $\|P_n - P_m\|_\infty \le 1$ pour $n, m \ge N$; en particulier $|P_n - P_N| \le 1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Un polynôme borné sur $\mathbb{R}$ est constant. Donc $P_n = P_N + c_n$ pour $n \ge N$, et $c_n = P_n(0) - P_N(0)$ converge vers $c = f(0) - P_N(0)$. Ainsi

$$f = \lim_n P_n = P_N + c$$

est un polynôme.

c) Non : e^x n'est pas un polynôme (sinon toutes ses dérivées s'annuleraient à partir d'un rang). Directement, $\mathrm{e}^x - T_n(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$ pour chaque n. La convergence est seulement uniforme sur les segments.

Réponse. Une limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes est un polynôme ; $T_n \not\to \mathrm{e}^x$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 9 – Propriétés conservées par la limite simple

a) $|f_n(x) - f_n(y)| \le k|x - y|$ passe à la limite. Sur $[a, b]$, pour $\varepsilon > 0$, soit une subdivision $x_0 < \cdots < x_p$ de pas $\le \varepsilon$ et N tel que $|f_n(x_j) - f(x_j)| \le \varepsilon$ pour tout j et $n \ge N$. Pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$:

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_n(x_j)| + |f_n(x_j) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| \le (2k + 1)\varepsilon$$

b) Oui pour « croissante » (inégalité large) ; non pour « strictement » : $f_n(x) = \frac{x}{n}$ tend vers 0.

c) Non, même exemple : les $\frac{x}{n}$ sont injectives, la limite constante ne l'est pas.

Réponse. Lipschitz et croissance passent à la limite simple (et Lipschitz donne l'uniformité sur un segment) ; stricte croissance et injectivité non.

Correction de l'exercice 10 – Convergence uniforme et intégrale sur une demi-droite

a) $0 \le f_n \le \frac{1}{n}$, donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$.

b) f_n est affine sur $[0, n^2]$, de $\frac{1}{n}$ à 0, et nulle ensuite (triangle) :

$$\int_0^{+\infty} f_n = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n}{2} \longrightarrow +\infty$$

c) La convergence uniforme permet d'intervertir limite et intégrale sur un **segment**, pas sur un intervalle non borné : la masse s'étale vers l'infini. Il faut alors une hypothèse de domination (convergence dominée), absente ici.

Réponse. $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ mais $\int_0^{+\infty} f_n = \frac{n}{2} \to \infty$: pas d'interversion hors d'un segment.

Correction de l'exercice 11 – Suites de points et non-uniformité

a) $|f_n(x_n) - f(x)| \le \|f_n - f\|_\infty + |f(x_n) - f(x)| \to 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour x fixé, $(x-n)^2 \to +\infty$ donc $f_n(x) \to 0$. Mais $f_n(n) = 1$: $\|f_n\|_\infty = 1$. La bosse part à l'infini.

c) La limite simple est 0 ($g_n(0) = 0$, et $g_n(x) \sim \frac{1}{nx}$ pour $x > 0$). Avec $x_n = \frac{1}{n} \to 0$:

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\longrightarrow 0 = f(0)$$

ce qui contredirait a) si la convergence était uniforme.

Réponse. Uniforme $\Rightarrow f_n(x_n) \to f(x)$; $f_n(n) = 1$ et $g_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ nient l'uniformité.

Correction de l'exercice 12 – Approximation de l'identité par des sinus

a) Pour tout u réel, $|\sin u - u| \le \frac{|u|^3}{6}$ (inégalité de Taylor-Lagrange, $|\sin'''| \le 1$). Avec $u = \frac{x}{n}$:

$$|f_n(x) - x| = n\left|\sin\frac{x}{n} - \frac{x}{n}\right| \le \frac{|x|^3}{6n^2}$$

b) Sur $[-A, A]$, l'écart est $\le \frac{A^3}{6n^2} \to 0$.

c) Non : $f_n(n\pi) = 0$ alors que l'identité vaut $n\pi$ en ce point, donc $\sup_{\mathbb{R}} |f_n - \mathrm{id}| \ge n\pi$. D'ailleurs f_n est bornée par n, et l'identité ne l'est pas.

Réponse. Écart $\le \frac{|x|^3}{6n^2}$: uniforme sur tout segment, pas sur $\mathbb{R}$ ($f_n(n\pi) = 0$).

Correction de l'exercice 13 – Convergence uniforme d'une suite de racines

a) Pour $x \le 1$: $1 \le 1 + x^n \le 2$, donc $f_n(x) \to 1$. Pour $x > 1$: $f_n(x) = x(1 + x^{-n})^{1/n} \to x$. Donc $f(x) = \max(1, x)$.

b) En $x = 1$: $f_n(1) - f(1) = 2^{1/n} - 1$, d'où la minoration. Pour la majoration, on utilise $(1+v)^{1/n} \le 1 + \frac{v}{n}$ (concavité de $v \mapsto (1+v)^{1/n}$) :

$$0 \le f_n(x) - 1 \le \frac{x^n}{n} \le \frac{1}{n} \ (x \le 1), \qquad 0 \le f_n(x) - x \le x \cdot \frac{x^{-n}}{n} \le \frac{1}{n} \ (x > 1)$$

Enfin $2^{1/n} - 1 \le \frac{1}{n}$ car $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ge 2$ (binôme), ce qui est cohérent.

c) $\|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{n} \to 0$: convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ vers $\max(1, x)$, fonction continue non dérivable en 1 — limite uniforme de fonctions C^∞.

Réponse. $f = \max(1, x)$; $2^{1/n} - 1 \le \|f_n - f\|_\infty \le \frac{1}{n}$: convergence uniforme.

Correction de l'exercice 14 – Polynômes et exponentielle sur la droite

a) Taylor-Lagrange : $\mathrm{e}^x - T_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^c$ avec c entre 0 et x, donc

$$|\mathrm{e}^x - T_n(x)| \le \frac{A^{n+1}\mathrm{e}^A}{(n+1)!} \quad \text{sur } [-A, A]$$

qui tend vers 0.

b) $\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty$ en $+\infty$, donc $\mathrm{e}^x - T_n(x) \to +\infty$.

c) Sur $\mathbb{R}$: non, une limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme (exercice précédent), et e^x n'en est pas un. Sur $[0, 1]$: oui, (T_n) elle-même (a) avec $A = 1$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Uniforme sur tout segment (reste $\le \frac{A^{n+1}e^{A}}{(n+1)!}$), jamais sur $\mathbb{R}$; aucune suite de polynômes ne convient sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : polynômes approchant la racine et la valeur absolue

a) Récurrence : si f_n est un polynôme, f_{n+1} aussi. Si $0 \le f_n \le \sqrt{x}$, alors $f_{n+1} \ge f_n \ge 0$ (car $x - f_n^2 \ge 0$) et la relation de b) donne $\sqrt{x} - f_{n+1} \ge 0$ (second facteur dans $[0,1]$).

b) $\sqrt{x} - f_{n+1} = \sqrt{x} - f_n - \frac{1}{2}(\sqrt{x} - f_n)(\sqrt{x} + f_n)$, d'où la factorisation. Comme $f_n \ge 0$, le second facteur est $\le 1 - \frac{\sqrt{x}}{2}$; par récurrence (avec $\sqrt{x} - f_0 = \sqrt{x}$) on obtient la majoration.

c) $\varphi(u) = u\left(1 - \frac{u}{2}\right)^n$ a pour dérivée $\left(1 - \frac{u}{2}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{(n+1)u}{2}\right)$, nulle en $u = \frac{2}{n+1}$:

$$\|\sqrt{\cdot} - f_n\|_\infty \le \varphi\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \le \frac{2}{n+1}$$

d) $P_n(x) = f_n(x^2)$ est un polynôme et $||x| - P_n(x)| = |\sqrt{x^2} - f_n(x^2)| \le \frac{2}{n+1}$ sur $[-1,1]$. C'est l'étape clé de la preuve du théorème de Weierstrass par Lebesgue.

Réponse. $0 \le \sqrt{x} - f_n \le \frac{2}{n+1}$; $P_n(x) = f_n(x^2) \to |x|$ uniformément sur $[-1,1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).