Plaquette 4 – Intégration et dérivation terme à terme, régularité des sommes

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Segment. Si $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ (fonctions continues) :

$$\int_a^b \sum_{n\geq 0} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 0} \int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Intervalle quelconque. Si les u_n sont intégrables sur I, si $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux et si $\sum \int_I |u_n| < +\infty$, on peut intervertir.

Dérivation. $u_n \in C^1$, $\sum u_n(x_0)$ converge, $\sum u_n'$ converge uniformément sur tout segment de $I \Rightarrow \sum u_n \in C^1$ et $\left(\sum u_n\right)' = \sum u_n'$. Même énoncé pour C^k avec les dérivées k-ièmes.

Intégrales utiles. $\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n+1)^2}$; $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.

Correction de l'exercice 1 – Intégrer une série de puissances sur le segment

a) $\left\|\frac{x^n}{n^2}\right\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{n^2}$: convergence normale, donc uniforme ; S est continue et l'on intègre terme à terme : $\int_0^1 \frac{x^n}{n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2(n+1)}$.

b) $\frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$, et la partie $\sum\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$ télescope vers -1 :

$$\int_0^1 S = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0{,}645$$

c) $S(1) = \frac{\pi^2}{6}$. Sur $[0,a]$, $a<1$, la série dérivée $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$ converge normalement, donc $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ pour $x \in]0,1[$ (et $S'(0)=1$).

Réponse. $\int_0^1 \sum \frac{x^n}{n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{6} - 1$; $S'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$.

Correction de l'exercice 2 – Logarithme et série harmonique des carrés alternée

a) $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ sur $[0,1]$ (série alternée en n pour x fixé), et le reste de la série divisée par x vérifie

$$\left|\sum_{n>N} \frac{(-1)^{n-1}x^{n-1}}{n}\right| \leq \frac{x^N}{N+1} \leq \frac{1}{N+1}$$

b) La convergence est donc uniforme sur $]0,1]$ (et la fonction se prolonge par 1 en 0) : intégration terme à terme sur le segment, avec $\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$.

c) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12} \approx 0{,}822467$, conforme à une intégration numérique.

Réponse. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Le rêve du deuxième année

a) Avec $x = \mathrm{e}^{-t/(k+1)}$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-t/(k+1)}}{k+1}\mathrm{d}t$, $\ln x = -\frac{t}{k+1}$:

$$\int_0^1 x^k(\ln x)^k\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{kt}{k+1}}\left(-\frac{t}{k+1}\right)^k \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t}{k+1}}}{k+1}\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

b) $x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln x}$ (prolongée par 1 en 0). Le terme général est majoré par $\frac{\mathrm{e}^{-k}}{k!}$ sur $[0,1]$: convergence normale, donc intégration terme à terme.

c) $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k\ge 0}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}} = \sum_{n\ge 1} n^{-n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{27} + \frac{1}{256} + \cdots \approx 1{,}2913$.

Réponse. $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n\ge 1} n^{-n} \approx 1{,}2913$.

Correction de l’exercice 4 – Une somme de classe infinie

a) Factorisation immédiate. $\frac{|P_k(t)|}{(1+t^2)^{k+1}}$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$ (degré $\le k < 2k+2$), donc bornée.

b) Par dérivation composée, $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[\frac{1}{n^2}g\left(\frac{x}{n}\right)\right] = \frac{1}{n^{k+2}}g^{(k)}\left(\frac{x}{n}\right)$, donc

$$\sup_{\mathbb{R}}\left|\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\frac{1}{n^2+x^2}\right| \le \frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{n^{k+2}}$$

terme d’une série convergente pour tout $k \ge 0$: toutes les séries dérivées convergent normalement sur $\mathbb{R}$, et $S \in C^\infty(\mathbb{R})$.

c) S est paire, donc $S'(0) = 0$. $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\frac{1}{n^2+x^2}$ vaut $-\frac{2}{n^4}$ en 0 (car $\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n^4} + O(x^4)$), d’où $S''(0) = -2\zeta(4) = -\frac{\pi^4}{45}$.

Réponse. Dérivées k-ièmes en $O(n^{-k-2})$: $S \in C^\infty$; $S'(0) = 0$, $S''(0) = -2\zeta(4)$.

Correction de l’exercice 5 – Régularité de la fonction zêta

a) Pour $x \ge a > 1$ et $1 < b < a$: $\frac{(\ln n)^k}{n^x} \le \frac{(\ln n)^k}{n^{a-b}}\cdot\frac{1}{n^b}$, et $\frac{(\ln n)^k}{n^{a-b}} \to 0$, donc

$$\sup_{x\ge a}\frac{(\ln n)^k}{n^x} = \frac{(\ln n)^k}{n^a} = O\left(\frac{1}{n^b}\right)$$

convergence normale sur $[a, +\infty[$ de chaque série dérivée : $\zeta \in C^\infty$ et l’on dérive terme à terme ($\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}n^{-x} = -\ln n\, n^{-x}$).

b) $\zeta'(x) = -\sum_{n\ge 2}\frac{\ln n}{n^x} < 0$ et $\zeta''(x) = \sum_{n\ge 2}\frac{(\ln n)^2}{n^x} > 0$.

c) Double limite sur $[2, +\infty[$ (convergence normale) : chaque terme $\frac{\ln n}{n^x}$ tend vers 0, donc $\zeta'(x) \to 0$.

Réponse. $\zeta \in C^\infty$, $\zeta' = -\sum\frac{\ln n}{n^x} < 0$, $\zeta'' > 0$, $\zeta' \to 0$ en $+\infty$.

Correction de l’exercice 6 – Identifier une somme par sa dérivée

a) Sur $[a, +\infty[$: $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \le \mathrm{e}^{-na}$ et $|u_n'(x)| = \mathrm{e}^{-nx} \le \mathrm{e}^{-na}$: convergences normales, donc

$$S'(x) = -\sum_{n\ge 1}\mathrm{e}^{-nx} = -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = -\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $0 \le S(x) \le \sum \mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1} \to 0$.

c) $g(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x})$ a pour dérivée $-\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = S'(x)$ et tend vers 0 en $+\infty$: $S - g$ est constante, de limite nulle, donc $S = g$. En 0^{+} : $1-\mathrm{e}^{-x} \sim x$, donc $S(x) = -\ln x + o(1) \sim \ln \dfrac{1}{x}$.

Réponse. $S' = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}$ et $S \to 0$: $S(x) = -\ln(1-\mathrm{e}^{-x}) \sim \ln \dfrac{1}{x}$ en 0^{+}.

Correction de l’exercice 7 – Intégration terme à terme sur une demi-droite

a) Série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x} \in \,]0,1[$: $\sum_{n \ge 1} \mathrm{e}^{-nx} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}-1}$.

b) Par parties (ou avec $t = nx$) : $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n^2}$. Les termes sont positifs et intégrables, la somme est continue sur $]0,+\infty[$, et

$$\sum_{n \ge 1} \int_0^{+\infty} |x\,\mathrm{e}^{-nx}|\,\mathrm{d}x = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

le théorème d’intégration terme à terme s’applique.

c) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x = \sum \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (intégrale qui intervient dans la loi de Planck du rayonnement).

Réponse. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n \ge 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Correction de l’exercice 8 – Une intégrale oscillante développée en série

a) L’intégrande est continue sur $]0,+\infty[$, tend vers 1 en 0, et est $O(\mathrm{e}^{-x})$ en $+\infty$.

b) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(i-n)x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n-i} = \dfrac{n+i}{n^2+1}$, dont la partie imaginaire donne

$$\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2+1}$$

c) $\int_0^{+\infty} |\sin x|\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n^2}$, série convergente : on peut intervertir, et $I = \sum_{n \ge 1} \dfrac{1}{n^2+1} \approx 1{,}0767$.

Réponse. $I = \sum_{n \ge 1} \dfrac{1}{n^2+1} \approx 1{,}0767$ (domination par $\sum \dfrac{1}{n^2}$).

Correction de l’exercice 9 – Itérations de Picard pour l’exponentielle

a) Récurrence : $1 + \int_0^{x} \sum_{k \le n} \dfrac{t^k}{k!}\,\mathrm{d}t = 1 + \sum_{k \le n} \dfrac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k \le n+1} \dfrac{x^k}{k!}$.

b) $\|f - f_n\|_{\infty,[-A,A]} \le \sum_{k > n} \dfrac{A^k}{k!} \to 0$ (reste de la série exponentielle). La convergence uniforme permet de passer à la limite sous l’intégrale :

$$f(x) = \lim f_{n+1}(x) = 1 + \lim \int_0^{x} f_n = 1 + \int_0^{x} f$$

c) f est continue (limite uniforme), donc $x \mapsto \int_0^{x} f$ est dérivable de dérivée f : $f' = f$, et $f(0) = 1$. On retrouve $f = \exp$ par une méthode qui se généralise (théorème de Cauchy-Lipschitz).

Réponse. $f_n = \sum_{k \le n} \dfrac{x^k}{k!} \to \mathrm{e}^{x}$ uniformément sur $[-A,A]$, limite solution de $f = 1 + \int_0^{x} f$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Limites d'intégrales par convergence uniforme

a) Sur $[0,1]$, $(1+\frac{x}{n})^n \to \mathrm{e}^x$ uniformément (écart $\le \frac{\mathrm{e}}{2n}$, plaquette 1), donc la limite vaut $\int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$.

b) $|n\sin\frac{x}{n} - x| \le \frac{x^3}{6n^2} \le \frac{\pi^3}{6n^2}$ sur $[0,\pi]$: convergence uniforme vers x, limite $\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}$.

c) $\left|\frac{n\mathrm{e}^x + x^2}{n+x} - \mathrm{e}^x\right| = \frac{|x^2 - x\mathrm{e}^x|}{n+x} \le \frac{1+\mathrm{e}}{n}$ sur $[0,1]$:

$$\int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^x + x^2}{n+x}\,\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}-1$$

Réponse. a) $\mathrm{e}-1$; b) $\frac{\pi^2}{2}$; c) $\mathrm{e}-1$.

Correction de l'exercice 11 – Une série alternée et son équivalent en l'infini

a) Convergence simple (critère spécial). Les dérivées $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$ sont majorées par $\frac{1}{n^2}$: convergence normale, donc $S \in C^1$ et $S'(x) = \sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, série alternée de premier terme positif dont la somme est strictement positive (comprise entre S_2 et S_1, avec $S_2 = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} > 0$).

b) $S(x+1) = \sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{n+1+x} = -\sum_{m\ge 2} \frac{(-1)^m}{m+x} = -S(x) - \frac{1}{1+x}$.

c) Par croissance, $2S(x) \le S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1} \le 2S(x+1)$, d'où

$$-\frac{1}{2x} \le S(x) \le -\frac{1}{2(x+1)} \quad (x \ge 1)$$

et $S(x) \sim -\frac{1}{2x}$. Enfin $S(0) = \sum \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Réponse. S croissante, $S(x)+S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$, $S(x) \sim -\frac{1}{2x}$, $S(0) = -\ln 2$.

Correction de l'exercice 12 – Une intégrale rationnelle par une série alternée

a) Somme géométrique finie : $\frac{1}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{N} (-x^3)^k + \frac{(-x^3)^{N+1}}{1+x^3}$, puis on intègre ($\int_0^1 x^{3k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3k+1}$).

b) $0 \le \int_0^1 \frac{x^{3N+3}}{1+x^3}\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x^{3N+3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3N+4} \to 0$.

c) Donc

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}8356$$

(la valeur de l'intégrale s'obtient par décomposition en éléments simples de $\frac{1}{1+x^3}$).

Réponse. $\sum_{k\ge 0} \frac{(-1)^k}{3k+1} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0{,}8356$.

Correction de l'exercice 13 – Dérivées qui convergent mal

a) $0 \le f_n(x) - |x| = \frac{1/n^2}{\sqrt{x^2 + 1/n^2} + |x|} \le \frac{1/n^2}{1/n} = \frac{1}{n}$, avec égalité en $x = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1/n^2}}$, qui tend vers $\operatorname{sgn}(x)$ (et 0 en 0). La limite est discontinue, les f_n' continues : pas de convergence uniforme. Quantitativement, $f_n'\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ alors que

$$\left|f_n'\left(\frac{1}{n}\right) - g\left(\frac{1}{n}\right)\right| = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \not\longrightarrow 0$$

c) Le théorème exige la convergence uniforme des dérivées ; elle fait défaut, et d'ailleurs la limite $|x|$ n'est pas dérivable en 0. Une limite uniforme de fonctions C^∞ peut ne pas être dérivable.

Réponse. $f_n \to |x|$ uniformément ($\frac{1}{n}$), mais $f_n' \to \operatorname{sgn}$ non uniformément : la limite n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 14 – Régularité de la fonction thêta

a) Pour $x \geq a > 0$: $\left|(-n^2)^k \mathrm{e}^{-n^2 x}\right| \leq n^{2k}\mathrm{e}^{-n^2 a}$, terme d'une série convergente (il est $O(n^{-2})$ par croissances comparées). Toutes les séries dérivées convergent normalement sur $[a, +\infty[$, donc

$$\theta^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^k n^{2k} \mathrm{e}^{-n^2 x}$$

b) $\theta' < 0$ et $\theta'' > 0$ sur $]0, +\infty[$.

c) $-\mathrm{e}^x \theta'(x) = 1 + \sum_{n \geq 2} n^2 \mathrm{e}^{-(n^2 - 1)x}$; sur $[1, +\infty[$, le terme général est majoré par $n^2 \mathrm{e}^{-(n^2 - 1)}$, série convergente, et tend vers 0 : par double limite, $-\mathrm{e}^x \theta'(x) \to 1$.

Réponse. $\theta \in C^\infty$, $\theta^{(k)} = \sum (-1)^k n^{2k} \mathrm{e}^{-n^2 x}$, décroissante convexe, $\theta'(x) \sim -\mathrm{e}^{-x}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une intégrale de deux logarithmes

a) En 0 : $\ln x \ln(1 - x) \sim -x \ln x \to 0$; en 1 : $\ln x \ln(1 - x) \sim (x - 1)\ln(1 - x) \to 0$. L'intégrande se prolonge par continuité : I existe. Par parties ($u = \ln x$, $v' = x^n$), $\int_\varepsilon^1 x^n \ln x \, \mathrm{d}x = -\frac{\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon}{n+1} - \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{(n+1)^2} \to -\frac{1}{(n+1)^2}$.

b) Sur $]0, 1[$, $\ln x \ln(1 - x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ avec $u_n(x) = -\frac{x^n \ln x}{n} \geq 0$. Pour des fonctions **positives**, l'intégration terme à terme est licite (théorème d'intégration terme à terme, la série $\sum \int u_n = \sum \frac{1}{n(n+1)^2}$ convergeant), donc

$$I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)^2}$$

c) $\frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$, donc $I = 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$.

d) Les deux logarithmes sont négatifs sur $]0, 1[$: $I > 0$, et $2 - \frac{\pi^2}{6} \approx 0{,}3551 > 0$ ✓.

Réponse. $I = \sum \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} \approx 0{,}3551$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).