Plaquette 3 – Séries de fonctions : modes de convergence, régularité et comportement aux bornes

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Normale ⇒ uniforme. $\left\|\sum_{k>n} u_k\right\|_\infty \leq \sum_{k>n} \|u_k\|_\infty$.

Séries alternées de fonctions. Si pour chaque x, $(|u_n(x)|)$ décroît vers 0 et $u_n(x) = (-1)^n |u_n(x)|$, alors $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$: la convergence est uniforme dès que $\|u_{n+1}\|_\infty \to 0$.

Double limite. Si $\sum u_n$ converge uniformément sur A et $u_n(x) \to \ell_n$ quand $x \to a$, alors $\sum \ell_n$ converge et

$$\lim_{x \to a} \sum_n u_n(x) = \sum_n \ell_n$$

Série-intégrale à paramètre. Si $t \mapsto f(t,x)$ décroît sur $[0,+\infty[$: $\int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n\geq 0} f(n,x) \leq f(0,x) + \int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t$.

Correction de l'exercice 1 – Deux séries télescopiques de fonctions

a) Pour $x < 1$, $\sum x^n(1-x) = 1$; en $x = 1$, la somme est 0. Somme discontinue de fonctions continues : convergence non uniforme sur $[0,1]$. Sur $[0,a]$, $\|u_n\|_\infty \leq a^n$: convergence normale.

b) Pour x fixé, $(x^n(1-x))$ décroît vers 0 : critère des séries alternées, et

$$|R_n(x)| \leq x^{n+1}(1-x) \leq \frac{1}{\mathrm{e}(n+1)}$$

(maximum de $x^{n+1}(1-x)$, voir la plaquette 2). Convergence uniforme ; somme $\frac{1-x}{1+x}$ (série géométrique de raison $-x$), qui vaut bien 0 en 1.

c) $\|u_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{\mathrm{e}n}$: $\sum \|u_n\|_\infty$ diverge, pas de convergence normale.

Réponse. $\sum u_n$: somme 1 puis 0 en 1, non uniforme ; $\sum (-1)^n u_n = \frac{1-x}{1+x}$, uniforme mais pas normale.

Correction de l'exercice 2 – Une série géométrique en exponentielle

a) Pour $x > 0$, série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-x} < 1$:

$$S(x) = x\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

et $S(0) = 0$.

b) $S(x) \to 1$ quand $x \to 0^+$, alors que $S(0) = 0$: S est discontinue en 0, donc la convergence (de fonctions continues) n'est pas uniforme sur $[0,+\infty[$.

c) $u_n'(x) = \mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$: pour $n \geq \frac{1}{a}$, u_n décroît sur $[a,+\infty[$, et $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = a\,\mathrm{e}^{-na}$, terme d'une série convergente.

Réponse. $S(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ ($\to 1$ en 0^+) mais $S(0) = 0$: pas uniforme sur $[0,+\infty[$; normale sur $[a,+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – La fonction thêta

a) Sur $[a,+\infty[$, $0<\mathrm{e}^{-n^2x}\le \mathrm{e}^{-n^2a}\le \mathrm{e}^{-na}$: convergence normale, donc continuité. Chaque terme décroît en x, donc θ aussi. Double limite en $+\infty$: $\theta(x)\to 1$ (seul le terme $n=0$ subsiste).

b) $t\mapsto \mathrm{e}^{-t^2x}$ décroît sur $[0,+\infty[$: $\int_0^{+\infty}\le \sum_{n\ge 0}\le 1+\int_0^{+\infty}$, et avec $u=t\sqrt{x}$:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2x}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

c) Les deux bornes sont équivalentes à $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ en 0^+ : $\theta(x)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$. (Par exemple $\theta(10^{-4})\approx 88{,}6\approx\frac{1}{2}\sqrt{\pi\cdot 10^4}$.)

Réponse. θ continue, décroissante, $\to 1$ en $+\infty$, et $\theta(x)\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ en 0^+.

Correction de l'exercice 4 – Équivalent logarithmique en zéro

a) Sur $[a,+\infty[$, $\frac{1}{n(1+nx)}\le\frac{1}{an^2}$: normale, donc continuité. Pour N fixé, $S(x)\ge\sum_{n\le N}\frac{1}{n(1+nx)}\to H_N$ quand $x\to 0^+$; H_N étant arbitrairement grand, $S\to+\infty$.

b) $\frac{1}{t(1+tx)}=\frac{1}{t}-\frac{x}{1+tx}$, donc

$$\int_1^A\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}=\left[\ln\frac{t}{1+tx}\right]_1^A\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\ln\frac{1}{x}+\ln(1+x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

c) $t\mapsto\frac{1}{t(1+tx)}$ décroît : $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\le S(x)\le\frac{1}{1+x}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, et $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\ln\frac{1}{x}$ en 0^+.

Réponse. $\ln(1+\frac{1}{x})\le S(x)\le\frac{1}{1+x}+\ln(1+\frac{1}{x})$, donc $S(x)\sim\ln\frac{1}{x}$.

Correction de l'exercice 5 – Somme de Riemann et échec de la double limite

a) Sur $[0,A]$: $\frac{x}{n^2+x^2}\le\frac{A}{n^2}$. Sur $[0,+\infty[$: le maximum en x est atteint en $x=n$ et vaut $\frac{1}{2n}$, série divergente.

b) Pour $x>0$ fixé, $t\mapsto\frac{x}{t^2+x^2}$ décroît sur $[0,+\infty[$, et $\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}t}{t^2+x^2}=\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\le\int_1^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\le S(x)\le\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}t}{t^2+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

(car $\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\le\frac{1}{x}$), d'où $S(x)\to\frac{\pi}{2}$.

c) Chaque terme tend vers 0 : $\sum\lim=0\ne\frac{\pi}{2}=\lim\sum$. Le théorème de la double limite ne s'applique pas, faute de convergence uniforme au voisinage de $+\infty$.

Réponse. Normale sur $[0,A]$ seulement ; $S(x)\to\frac{\pi}{2}$ alors que chaque terme tend vers 0.

Correction de l'exercice 6 – Régularité d'une série trigonométrique

a) $\|u_n\|_\infty\le\frac{1}{n^3}$ et $u_n'(x)=\frac{\cos(nx)}{n^2}$ avec $\|u_n'\|_\infty\le\frac{1}{n^2}$: convergences normales, donc S est C^1 et

$$S'(x)=\sum_{n\ge 1}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

b) $u_n''(x)=-\frac{\sin(nx)}{n}$, $\|u_n''\|_\infty=\frac{1}{n}$ (atteint) : pas de convergence normale ; le théorème ne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

permet pas de conclure à C^2.

c) $S'(0) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Intégration terme à terme (convergence uniforme sur le segment) : $\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{1-(-1)^n}{n}$, donc $\int_0^\pi S = \sum_n \frac{1-(-1)^n}{n^4} = \sum_{k\geq 0} \frac{2}{(2k+1)^4}$.

Réponse. $S \in C^1$, $S' = \sum \frac{\cos nx}{n^2}$, $S'(0) = \frac{\pi^2}{6}$, $\int_0^\pi S = \sum_k \frac{2}{(2k+1)^4}$.

Correction de l'exercice 7 – Série alternée de logarithmes

a) Pour x fixé, $\ln(1+\frac{x}{n})$ décroît vers 0 : critère spécial.

b) Sur $[0,A]$, le reste vérifie

$$|R_n(x)| \leq \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right) \leq \frac{A}{n+1} \longrightarrow 0$$

Mais $\|u_n\|_{\infty,[0,A]} = \ln\left(1+\frac{A}{n}\right) \sim \frac{A}{n}$, série divergente : pas de convergence normale.

c) Les u_n sont continues et la convergence est uniforme sur chaque $[0,A]$: la somme est continue sur chaque $[0,A]$, donc sur $[0,+\infty[$ (la continuité est une propriété locale).

Réponse. Reste $\leq \frac{A}{n+1}$: uniforme sur $[0,A]$, pas normale ($\sim \frac{A}{n}$) ; somme continue.

Correction de l'exercice 8 – Une fonction qui interpole les nombres harmoniques

a) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$. Pour $x \in]-1,A]$ et $n \geq 2$: $|x| \leq \max(1,A)$ et $n+x \geq n-1$, donc

$$\left|\frac{x}{n(n+x)}\right| \leq \frac{\max(1,A)}{n(n-1)}$$

terme d'une série convergente : normale (le terme $n=1$, continu sur $]-1,A]$, se traite à part). Chaque terme est croissant en x, donc f aussi.

b) $f(x+1) - f(x) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{1+x}$ (télescopage). Avec $f(0)=0$: $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$.

c) $f(x) = f(x+1) - \frac{1}{x+1}$ avec $f(x+1) \to f(0) = 0$ (continuité) et $\frac{1}{x+1} \to +\infty$.

Réponse. f continue croissante sur $]-1,+\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x+1}$, $f(n) = H_n$, $f \to -\infty$ en -1^+.

Correction de l'exercice 9 – Comportement près d'un pôle

a) Pour $|x| \leq 1$ et $n \geq 2$: $0 < \frac{1}{n^2-x^2} \leq \frac{1}{n^2-1}$, série convergente : normale sur $[-1,1]$, donc T est continue.

b) $S(x) = \frac{1}{1-x^2} + T(x)$ avec T bornée au voisinage de 1, et $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}$:

$$S(x) \sim \frac{1}{2(1-x)} \quad (x \to 1^-)$$

c) $\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$, donc $T(1) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Réponse. T continue sur $[-1,1]$ (normale), $S(x) \sim \frac{1}{2(1-x)}$ en 1^-, $T(1) = \frac{3}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Somme continue mais non dérivable au bord

a) $\left|\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}\right| \le \frac{1}{1+n^2}$ sur $[0,+\infty[$: normale, continuité. Les dérivées $-\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$ sont majorées sur $[a,+\infty[$ par e^{-na} : normale, donc C^1 sur $]0,+\infty[$.

b) $\frac{S(0)-S(x)}{x} = \sum_{n\ge 1}\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{x(1+n^2)}$, série à termes positifs, minorée par chacune de ses sommes partielles.

c) Quand $x\to 0^+$, $\frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{x}\to n$, donc pour N fixé, la minoration tend vers $\sum_{n\le N}\frac{n}{1+n^2}$, qui tend vers $+\infty$ avec N ($\frac{n}{1+n^2}\sim\frac{1}{n}$). Donc

$$\frac{S(x)-S(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

et le graphe de S a une tangente verticale en 0.

Réponse. S continue sur $[0,+\infty[$, C^1 sur $]0,+\infty[$, mais taux d'accroissement en 0 tendant vers $-\infty$.

Correction de l'exercice 11 – Convergence uniforme sans convergence normale : supports disjoints

a) Pour chaque x, au plus deux $u_n(x)$ sont non nuls ($x-n\in[0,1]$ impose $n\in[x-1,x]$) : la série est une somme finie.

b) Pour x fixé, $R_N(x)=\sum_{n>N}u_n(x)$ contient au plus deux termes non nuls, chacun $\le\frac{1}{N+1}$; plus précisément, deux supports $[n,n+1]$ consécutifs ne se chevauchent qu'en un point où φ vaut $\varphi(1)=\varphi(0)=0$. Donc

$$\sup_x |R_N(x)| \le \frac{1}{N+1}$$

c) $\|u_n\|_\infty=\frac{1}{n}$ (atteint en $n+\frac{1}{2}$) : $\sum\|u_n\|_\infty=+\infty$.

Réponse. Supports disjoints : reste $\le\frac{1}{N+1}$ (uniforme), mais $\sum\|u_n\|_\infty=\sum\frac{1}{n}$ diverge.

Correction de l'exercice 12 – Une somme de sinus impaire

a) $\left|\sin\frac{x}{n^2}\right|\le\frac{|x|}{n^2}\le\frac{A}{n^2}$ sur $[-A,A]$: convergence normale, S continue ; chaque terme est impair.

b) $u_n'(x)=\frac{1}{n^2}\cos\frac{x}{n^2}$, avec $\|u_n'\|_\infty\le\frac{1}{n^2}$: normale sur $\mathbb{R}$, donc $S\in C^1$ et

$$S'(0)=\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

c) $S(0)=0$ et $S'(0)=\frac{\pi^2}{6}\neq 0$: $S(x)\sim\frac{\pi^2}{6}x$ en 0.

Réponse. S continue, impaire, C^1 ; $S'(0)=\frac{\pi^2}{6}$ et $S(x)\sim\frac{\pi^2}{6}x$.

Correction de l'exercice 13 – Convergence normale sur tout le segment

a) $u_n(x)=\frac{x^n(1-x)}{n}$, maximal en $x=\frac{n}{n+1}$:

$$\|u_n\|_\infty=\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}\sim\frac{1}{\mathrm{e}n^2}$$

terme d'une série convergente : convergence normale sur $[0,1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $x < 1$: $\sum u_n(x) = (1-x)\sum \frac{x^n}{n} = -(1-x)\ln(1-x)$. En $x = 1$: tous les termes sont nuls, somme 0.

c) $-(1-x)\ln(1-x) \to 0$ quand $x \to 1^-$ (croissances comparées, $u \ln u \to 0$) : continuité en 1, comme le garantit la convergence normale.

Réponse. $\|u_n\|_\infty \sim \frac{1}{\mathrm{e} n^2}$: normale sur $[0,1]$; somme $-(1-x)\ln(1-x)$, continue en 1.

Correction de l'exercice 14 – Équivalent en l'infini

a) $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$: normale sur $[0,+\infty[$, continuité, et $S(0) = \frac{\pi^2}{6}$.

b) On multiplie terme à terme par e^x. Sur $[1,+\infty[$, $\frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$: convergence normale, et chaque terme tend vers 0 ($n \geq 2$) ; par la double limite,

$$\sum_{n \geq 2} \frac{\mathrm{e}^{-(n-1)x}}{n^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) $\mathrm{e}^x S(x) \to 1$, c'est-à-dire $S(x) \sim \mathrm{e}^{-x}$: le premier terme l'emporte.

Réponse. S continue, $S(0) = \frac{\pi^2}{6}$, $S(x) \sim \mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la fonction êta et le pôle de zêta

a) Pour x fixé, $\frac{1}{n^x}$ décroît vers 0 : critère spécial, et pour $x \geq a$,

$$|R_N(x)| \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(N+1)^a} \longrightarrow 0$$

Convergence uniforme sur $[a,+\infty[$, donc η est continue sur chaque $[a,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$.

b) Double limite (convergence uniforme sur $[1,+\infty[$) : le terme $n = 1$ vaut 1, les autres tendent vers 0, donc $\eta(x) \to 1$.

c) $1 - 2^{1-x} = 1 - \mathrm{e}^{-(x-1)\ln 2} \sim (x-1)\ln 2$, et $\eta(x) \to \eta(1) = \ln 2$ par continuité. Donc $\zeta(x) = \frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}} \sim \frac{\ln 2}{(x-1)\ln 2} = \frac{1}{x-1}$.

Réponse. η continue sur $]0,+\infty[$, $\eta \to 1$ en $+\infty$, et $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ en 1^+.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).