Plaquette 5 – Approximation uniforme et problèmes de synthèse

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Le **théorème de Weierstrass** (toute fonction continue sur un segment est limite uniforme de polynômes) se démontre par les **polynômes de Bernstein**, et s'utilise pour transférer une propriété vraie pour les polynômes à toutes les fonctions continues (moments nuls). Les problèmes de synthèse combinent les outils du chapitre : convergence normale pour **construire** une fonction (série de translatées, de dilatées : fonction de Takagi, équations fonctionnelles), découpage d'une intégrale en une zone de convergence uniforme et une zone petite (**approximation de l'unité** $n\int x^n f$), monotonie (théorèmes de Dini) et **double limite** (lemme d'Abel pour les termes positifs).

Exercice 1 – Polynômes de Bernstein des premiers monômes

Soit $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$.

a) Montrer que $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1$.

b) En dérivant $\sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$ par rapport à x, montrer que $\sum_k \frac{k}{n} p_{n,k}(x) = x$.

c) En dérivant deux fois, montrer que $B_n(x^2) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$, puis que $\sum_k \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$.

Exercice 2 – Le théorème de Weierstrass par Bernstein

Soit $f \in C([0,1])$, $M = \|f\|_\infty$, $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ (Heine).

a) Montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \sum_k \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| p_{n,k}(x)$.

b) En séparant les k tels que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \leq \delta$ et les autres, montrer que $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{1}{4n}$.

c) Conclure.

Exercice 3 – Une fonction dont tous les moments sont nuls

Soit $f \in C([0,1])$ telle que $\int_0^1 f(x) x^n \, dx = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\int_0^1 fP = 0$ pour tout polynôme P.

b) Soit (P_k) une suite de polynômes convergeant uniformément vers f. Montrer que $\int_0^1 f P_k \to \int_0^1 f^2$.

c) En déduire $f = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – La fonction de Takagi

Soit $d(x)$ la distance de x à $\mathbb{Z}$ et $T(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{d(2^n x)}{2^n}$.

a) Montrer que T est définie, continue, 1-périodique et que $0 \leq T \leq 1$.

b) Montrer que $T(x) = d(x) + \frac{1}{2}T(2x)$, et calculer $T\left(\frac{1}{2}\right)$ et $T\left(\frac{1}{3}\right)$.

c) Montrer que $T(2^{-m}) = m2^{-m}$, et en déduire que T n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5 – Une équation fonctionnelle résolue par une série

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée telle que $f(x) - \frac{1}{2}f(2x) = \cos x$ pour tout x.

a) Montrer que $F(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(2^n x)}{2^n}$ est continue, bornée par 2, et solution.

b) Montrer l'unicité : si g est continue bornée et vérifie $g(x) = \frac{1}{2}g(2x)$, alors $g = 0$.

c) Calculer $F(0)$ et $F(\pi)$.

Exercice 6 – Second théorème de Dini

Soit (f_n) une suite de fonctions **croissantes** sur $[a, b]$, convergeant simplement vers une fonction f **continue**.

a) Montrer que f est croissante.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et $a = x_0 < \cdots < x_p = b$ tels que $f(x_{j+1}) - f(x_j) \leq \varepsilon$ (Heine). Montrer qu'il existe N tel que $|f_n(x_j) - f(x_j)| \leq \varepsilon$ pour tout j et $n \geq N$.

c) Pour $x \in [x_j, x_{j+1}]$, encadrer $f_n(x)$ et conclure à la convergence uniforme.

Exercice 7 – Sinus itéré de fonctions

Soit $f_0(x) = x$ et $f_{n+1} = \sin \circ f_n$ sur $\mathbb{R}$, et (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sin u_n$.

a) Montrer que $\|f_{n+1}\|_\infty \leq u_n$ pour $n \geq 0$.

b) En déduire que $f_n \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$, et donner la vitesse (on rappelle $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$).

c) La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$ dès le rang 0 au sens de $\|f_n\|_\infty < \infty$?

Exercice 8 – Limite de l'intégrale de f de x puissance n

Soit $f \in C([0, 1])$. On veut montrer que $\int_0^1 f(x^n)\,dx \to f(0)$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ tel que $|f(t) - f(0)| \leq \varepsilon$ pour $0 \leq t \leq \eta$. Montrer que, pour $\delta \in]0, 1[$ fixé, $x^n \leq \eta$ sur $[0, 1 - \delta]$ dès que n est assez grand.

b) Majorer $\left|\int_0^1 f(x^n)\,dx - f(0)\right|$ par $\varepsilon + 2\|f\|_\infty \delta$ pour n grand.

c) Conclure, et calculer $\lim \int_0^1 \cos(x^n)\,dx$.

Exercice 9 – Une approximation de l'unité

Soit $f \in C([0, 1])$ et $I_n = (n + 1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Calculer I_n pour $f = 1$.

b) Montrer que $|I_n - f(1)| \leq (n+1)\int_0^1 x^n |f(x) - f(1)|\,\mathrm{d}x$, et en découpant en $1-\delta$, que $I_n \to f(1)$.

c) En déduire un équivalent de $\int_0^1 x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 – Périodisation d'une gaussienne

Soit $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$.

a) Montrer que la série converge normalement sur $[-A, A]$ (pour $|n| \geq 2A$, $|x-n| \geq \frac{|n|}{2}$).

b) En déduire que F est continue et 1-périodique.

c) Montrer que F est de classe C^1 et que $F'(0) = 0$.

Exercice 11 – Lemme d'Abel pour des coefficients positifs

Soit (a_n) une suite de réels **positifs** et $f(x) = \sum a_n x^n$ pour $x \in [0,1[$ (on suppose la série convergente sur $[0,1[$).

a) Si $\sum a_n$ converge, montrer que la série converge normalement sur $[0,1]$ et que $f(x) \to \sum a_n$ quand $x \to 1^-$.

b) Si $\sum a_n$ diverge, montrer que $f(x) \to +\infty$ quand $x \to 1^-$.

c) Application : limite en 1^- de $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ et de $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$.

Exercice 12 – Limite uniforme de fonctions uniformément continues

a) Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continues sur I, convergeant uniformément vers f. Montrer que f est uniformément continue.

b) Montrer de deux façons que $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$: par a), puis en majorant f'.

c) Une limite simple de fonctions uniformément continues est-elle uniformément continue ?

Exercice 13 – Une série trigonométrique sommée explicitement

Soit $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(nx)}{2^n}$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et que $f(x) = \mathrm{Re}\dfrac{1}{1-\frac{\mathrm{e}^{ix}}{2}}$.

b) En déduire $f(x) = \dfrac{1-\frac{1}{2}\cos x}{\frac{5}{4}-\cos x}$.

c) Calculer $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ par intégration terme à terme.

Exercice 14 – Une fonction non approchable par des polynômes

a) Montrer qu'une limite uniforme sur $]0,1]$ d'une suite de polynômes est bornée sur $]0,1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que $x \mapsto \frac{1}{x}$ n'est pas limite uniforme de polynômes sur $]0,1]$.

c) Est-elle limite uniforme de polynômes sur $[a,1]$, $a>0$? Quelle hypothèse de Weierstrass manque sur $]0,1]$?

Exercice 15 – Synthèse : Bernstein de l'exponentielle

Soit $f(t)=\mathrm{e}^{t}$ sur $[0,1]$.

a) Montrer que $B_n(f)(x)=\left(1-x+x\,\mathrm{e}^{1/n}\right)^n$.

b) Avec $u=x(\mathrm{e}^{1/n}-1)$ et $u-\frac{u^2}{2}\le \ln(1+u)\le u$, montrer que $n\ln\left(1+x(\mathrm{e}^{1/n}-1)\right)=x+O\left(\frac{1}{n}\right)$ uniformément en $x\in[0,1]$.

c) En déduire $\|B_n(f)-f\|_\infty=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

d) Comparer avec l'erreur des polynômes de Taylor $\sum_{k\le n}\frac{x^k}{k!}$ sur $[0,1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).