Plaquette 1 – Convergence simple, uniforme, normale et théorèmes de passage à la limite

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On détermine d'abord la **limite simple**, puis on étudie $\sup_x |f_n(x) - f(x)|$ pour l'uniformité ; on utilise la **convergence normale** pour les séries, et les théorèmes d'interversion (continuité, intégration, dérivation).

Exercice 1 – Convergence simple sans uniformité

Soit $f_n(x) = x^n$ sur $[0\,;1]$. Étudier les convergences simple et uniforme.

Exercice 2 – Convergence uniforme

Soit $f_n(x) = \dfrac{x}{1+nx^2}$ sur $\mathbb{R}$. Étudier la convergence uniforme.

Exercice 3 – Interversion limite-intégrale

Soit $f_n(x) = nx(1-x)^n$ sur $[0\,;1]$. Comparer $\lim_n \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 \lim_n f_n$.

Exercice 4 – Convergence normale

Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 – Convergence uniforme sans normalité

Montrer que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ mais pas normalement.

Exercice 6 – Continuité de la somme

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$. Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 – Dérivation terme à terme

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$ sur $[a\,;+\infty[$ avec $a>0$. Montrer que S est C^1 et calculer S'.

Exercice 8 – Théorème de la double limite

Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ sur $]0\,;+\infty[$. Calculer $\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$ et $\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Convergence dominée

Calculer $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^3}\,\mathrm{d}x$ — ou du moins l'encadrer.

Exercice 10 – Approximation uniforme

Soit $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que f_n converge uniformément vers $|x|$.

Exercice 11 – Série entière et rayon

Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!}$ sur $[-A\,;A]$ pour $A>0$.

Exercice 12 – Convergence uniforme sur tout segment mais pas sur la droite

Soit $f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ pour $x>-n$, prolongée par 0 pour $x\leq -n$.

a) Montrer que (f_n) converge simplement vers $x\mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, pour $0\leq x\leq A$, $0\leq \mathrm{e}^x-f_n(x)\leq \frac{A^2\mathrm{e}^A}{2n}$, et en déduire la convergence uniforme sur $[0,A]$.

c) La convergence est-elle uniforme sur $[0,+\infty[$?

Exercice 13 – La fonction zêta de Riemann

Soit $\zeta(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$ pour $x>1$.

a) Montrer que la série converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>1$, et en déduire que ζ est continue sur $]1,+\infty[$.

b) Montrer que $\zeta(x)\geq\frac{1}{x-1}$, et en déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]1,+\infty[$.

c) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)$.

Exercice 14 – Équivalent d'une somme de série en zéro

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2x^2}$ pour $x>0$.

a) Montrer que S est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Par comparaison série-intégrale, montrer que $\frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)\leq S(x)\leq\frac{\pi}{2x}$.

c) En déduire $S(x)\sim\frac{\pi}{2x}$ en 0^+, et la limite de S en $+\infty$.

Exercice 15 – Synthèse : étude complète

Soit $S(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ pour $x\in[0\,;1]$.

a) Étudier la convergence.

b) Calculer $S(x)$ sur $[0\,;1[$, puis $S(1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).