Plaquette 2 – Convergence uniforme des suites de fonctions : méthodes et contre-exemples

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule d'abord la **limite simple** f (x fixé, $n \to +\infty$). Pour **prouver** la convergence uniforme, on majore $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité ε_n indépendante de x qui tend vers 0, souvent en étudiant les variations de $f_n - f$ (le sup est atteint en un point x_n calculable). Pour la **nier**, on exhibe une suite x_n telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to 0$, ou l'on remarque que la limite simple n'est pas continue alors que les f_n le sont. On précise toujours **sur quelle partie** la convergence est uniforme (souvent sur $[a, +\infty[$ mais pas au voisinage d'un point critique).

Exercice 1 – Une bosse qui se déplace

Soit $f_n(x) = nx\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$.

a) Déterminer la limite simple.

b) Calculer $\|f_n\|_\infty$ sur $[0, +\infty[$. La convergence est-elle uniforme ?

c) Montrer qu'elle est uniforme sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Exercice 2 – Deux suites voisines

Sur $[0, 1]$, on pose $g_n(x) = x^n(1 - x)$ et $h_n(x) = nx^n(1 - x)$.

a) Calculer $\|g_n\|_\infty$ et montrer que $g_n \to 0$ uniformément.

b) Montrer que $h_n \to 0$ simplement mais pas uniformément.

c) Calculer $\int_0^1 h_n$ et sa limite. Que conclure ?

Exercice 3 – Convergence uniforme sans convergence des dérivées

Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $f_n \to 0$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Étudier la suite $(f_n'(0))$.

c) Quel théorème cela illustre-t-il ?

Exercice 4 – Limite simple discontinue

Soit $f_n(x) = \sin^n x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Déterminer la limite simple f.

b) En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Montrer qu'elle l'est sur $[0, a]$ pour $a < \frac{\pi}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Quand l'intégrale ne passe pas à la limite

Soit $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$ sur $[0,1]$.

a) Montrer que $f_n \to 0$ simplement.

b) Calculer $\int_0^1 f_n$ (poser $u = 1-x$) et sa limite.

c) Calculer $\|f_n\|_\infty$ et conclure.

Exercice 6 – Arc tangente accélérée

Soit $f_n(x) = \arctan(nx)$ sur $\mathbb{R}$.

a) Déterminer la limite simple f.

b) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$? sur $]0,+\infty[$?

c) Montrer qu'elle est uniforme sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$, et majorer l'écart.

Exercice 7 – Composition et produit de limites uniformes

a) Soit $f_n \to f$ uniformément sur A et g uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f_n \to g \circ f$ uniformément.

b) Avec $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = x^2$, montrer que $g \circ f_n$ ne converge pas uniformément vers $g \circ f$.

c) Si $f_n \to f$ et $g_n \to g$ uniformément avec f, g bornées, montrer que $f_n g_n \to fg$ uniformément.

Exercice 8 – Limite uniforme de polynômes sur la droite

Soit (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.

a) Montrer qu'il existe N tel que $P_n - P_N$ soit borné sur $\mathbb{R}$ pour $n \geq N$.

b) En déduire que $P_n - P_N$ est constant pour $n \geq N$, puis que f est un polynôme.

c) Application : la suite des polynômes de Taylor $T_n(x) = \sum_{k \leq n} \frac{x^k}{k!}$ converge-t-elle uniformément vers e^x sur $\mathbb{R}$?

Exercice 9 – Propriétés conservées par la limite simple

Soit (f_n) convergeant simplement vers f sur un intervalle I.

a) Si les f_n sont k-lipschitziennes, montrer que f l'est, et que la convergence est alors uniforme sur tout segment (on admettra qu'il suffit de la contrôler sur une subdivision fine).

b) Si les f_n sont croissantes, f l'est-elle ? strictement croissantes, f l'est-elle ?

c) Si les f_n sont injectives, f l'est-elle ?

Exercice 10 – Convergence uniforme et intégrale sur une demi-droite

Soit $f_n(x) = \frac{1}{n}\max\left(0, 1 - \frac{x}{n^2}\right)$ sur $[0,+\infty[$.

a) Montrer que $f_n \to 0$ uniformément sur $[0,+\infty[$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Conclure sur le théorème d'interversion limite-intégrale.

Exercice 11 – Suites de points et non-uniformité

a) Soit $f_n \to f$ uniformément sur A, f continue, et $x_n \to x$ dans A. Montrer que $f_n(x_n) \to f(x)$.

b) Soit $f_n(x) = \dfrac{1}{1+(x-n)^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f_n \to 0$ simplement mais pas uniformément.

c) Soit $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ sur $[0,1]$. Utiliser a) pour montrer que la convergence vers 0 n'est pas uniforme.

Exercice 12 – Approximation de l'identité par des sinus

Soit $f_n(x) = n \sin \frac{x}{n}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $|f_n(x) - x| \leq \dfrac{|x|^3}{6n^2}$.

b) En déduire la convergence uniforme sur tout segment $[-A, A]$.

c) La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 13 – Convergence uniforme d'une suite de racines

Soit $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$ $(n \geq 1)$.

a) Déterminer la limite simple f (distinguer $x \leq 1$ et $x > 1$).

b) Montrer que $2^{1/n} - 1 \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ (utiliser $(1+v)^{1/n} \leq 1 + \frac{v}{n}$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2$).

c) Conclure.

Exercice 14 – Polynômes et exponentielle sur la droite

Soit $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!}$.

a) Montrer que $\sup_{[-A,A]} |e^x - T_n(x)| \leq \dfrac{A^{n+1} e^A}{(n+1)!}$.

b) Montrer que, pour tout n, $\sup_{\mathbb{R}} |e^x - T_n(x)| = +\infty$.

c) Existe-t-il une suite de polynômes convergeant uniformément vers e^x sur $\mathbb{R}$? sur $[0,1]$?

Exercice 15 – Synthèse : polynômes approchant la racine et la valeur absolue

On définit sur $[0,1]$: $f_0 = 0$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n(x)^2\right)$.

a) Montrer que f_n est un polynôme et que $0 \leq f_n(x) \leq \sqrt{x}$.

b) Montrer que $\sqrt{x} - f_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - f_n(x))\left(1 - \dfrac{\sqrt{x} + f_n(x)}{2}\right)$, puis que $\sqrt{x} - f_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.

c) En étudiant $u \mapsto u\left(1 - \frac{u}{2}\right)^n$ sur $[0,1]$, montrer que $\|\sqrt{\cdot} - f_n\|_\infty \leq \dfrac{2}{n+1}$.

d) En déduire une suite de polynômes convergeant uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $[-1,1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).