Plaquette 4 – Intégration et dérivation terme à terme, régularité des sommes

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour **calculer une intégrale**, on développe l'intégrande en série ($\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^{u}, $\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1} = \sum \mathrm{e}^{-nx}$), puis on intègre terme à terme : sur un **segment**, la convergence uniforme suffit (on peut aussi majorer le reste à la main) ; sur un intervalle **quelconque**, on vérifie $\sum \int |u_n| < +\infty$ ou l'on travaille avec des termes **positifs**. Pour la **régularité** d'une somme $\sum u_n$, on dérive terme à terme : convergence de la série en un point et convergence **uniforme** (souvent normale, localement) de la série des dérivées. Une relation fonctionnelle ($S(x)+S(x+1)$, S') permet ensuite d'identifier la somme ou son comportement.

Exercice 1 – Intégrer une série de puissances sur le segment

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^2}$ sur $[0,1]$.

a) Justifier que S est continue sur $[0,1]$ et que $\int_0^1 S = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)}$.

b) Décomposer $\frac{1}{n^2(n+1)}$ en éléments simples et en déduire $\int_0^1 S$ à l'aide de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

c) Calculer $S(1)$ et S' sur $[0,1[$.

Exercice 2 – Logarithme et série harmonique des carrés alternée

a) Montrer que pour $x \in]0,1]$, $\frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{n-1}}{n}$, avec un reste majoré par $\frac{x^N}{N+1}$.

b) En déduire $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

c) Sachant $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, conclure, et vérifier numériquement ($\approx 0{,}8225$).

Exercice 3 – Le rêve du deuxième année

a) Montrer que $\int_0^1 x^k (\ln x)^k \,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ (poser $x = \mathrm{e}^{-t/(k+1)}$ et utiliser $\int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k!$).

b) Écrire $x^{-x} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-x\ln x)^k}{k!}$ et justifier l'intégration terme à terme sur $[0,1]$ (avec $|x \ln x| \leq \frac{1}{\mathrm{e}}$).

c) En déduire $\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^n}$, et en donner une valeur approchée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Une somme de classe infinie

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2}$ et $g(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) Montrer que $\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2} g\left(\frac{x}{n}\right)$ et que les dérivées de g sont bornées sur $\mathbb{R}$ (on admet que $g^{(k)}(t) = \frac{P_k(t)}{(1+t^2)^{k+1}}$ avec $\deg P_k \leq k$).

b) En déduire que la dérivée k-ième du terme général est majorée par $\frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{n^{k+2}}$, et que S est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer $S'(0)$ et $S''(0)$.

Exercice 5 – Régularité de la fonction zêta

Soit $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} n^{-x}$ sur $]1, +\infty[$.

a) Montrer que ζ est de classe C^∞, avec $\zeta^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}$.

b) En déduire que ζ est strictement décroissante et convexe.

c) Montrer que $\zeta'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 6 – Identifier une somme par sa dérivée

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ pour $x > 0$.

a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $S'(x)$ sous forme close.

b) Montrer que $S(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

c) En déduire $S(x) = -\ln(1 - \mathrm{e}^{-x})$, et un équivalent de S en 0^+.

Exercice 7 – Intégration terme à terme sur une demi-droite

a) Pour $x > 0$, écrire $\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = \sum_{n \geq 1} x\,\mathrm{e}^{-nx}$.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$, puis justifier l'intégration terme à terme sur $]0, +\infty[$.

c) En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 8 – Une intégrale oscillante développée en série

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de I.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ (partie imaginaire d'une intégrale d'exponentielle complexe).

c) Justifier l'intégration terme à terme (majorer $|\sin x| \leq x$) et en déduire $I = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 9 – Itérations de Picard pour l'exponentielle

On pose $f_0 = 1$ et $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sur $[-A, A]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

b) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-A, A]$ vers une fonction f qui vérifie $f(x) = 1 + \int_0^x f$.

c) En déduire que f est solution de $y' = y$, $y(0) = 1$.

Exercice 10 – Limites d'intégrales par convergence uniforme

Calculer les limites suivantes en justifiant :

a) $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 (1 + \frac{x}{n})^n \, \mathrm{d}x$;

b) $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi} n \sin \frac{x}{n} \, \mathrm{d}x$;

c) $\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{n\mathrm{e}^x + x^2}{n + x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice 11 – Une série alternée et son équivalent en l'infini

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n + x}$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que S est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que $S(x) + S(x+1) = -\frac{1}{x+1}$.

c) En déduire $S(x) \sim -\frac{1}{2x}$ en $+\infty$, et $S(0)$.

Exercice 12 – Une intégrale rationnelle par une série alternée

a) Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{3k+1} + (-1)^{N+1} \int_0^1 \frac{x^{3N+3}}{1+x^3} \mathrm{d}x$.

b) En déduire $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{3k+1}$, avec une erreur $\leq \frac{1}{3N+4}$.

c) Sachant que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$, donner la somme de la série.

Exercice 13 – Dérivées qui convergent mal

Soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sur $[-1, 1]$.

a) Montrer que $f_n \to |x|$ uniformément, avec $\|f_n - |\cdot|\|_\infty = \frac{1}{n}$.

b) Déterminer la limite simple g de (f_n'). La convergence est-elle uniforme ?

c) Expliquer pourquoi cela n'est pas en contradiction avec le théorème de dérivation.

Exercice 14 – Régularité de la fonction thêta

Soit $\theta(x) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-n^2 x}$ pour $x > 0$.

a) Montrer que θ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et exprimer $\theta^{(k)}$.

b) En déduire que θ est décroissante et convexe.

c) Montrer que $\theta'(x) \sim -\mathrm{e}^{-x}$ en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : une intégrale de deux logarithmes

Soit $I = \int_0^1 \ln x \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de I et montrer que $\int_0^1 x^n \ln x\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

b) Avec $\ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$, justifier que $I = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)^2}$ (signe des termes).

c) Décomposer $\dfrac{1}{n(n+1)^2}$ et en déduire $I = 2 - \dfrac{\pi^2}{6}$.

d) Vérifier la cohérence du signe et donner une valeur approchée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).