Plaquette 3 – Séries de fonctions : modes de convergence, régularité et comportement aux bornes

Suites et séries de fonctions — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour une série de fonctions $\sum u_n$, on cherche d'abord la **convergence normale** ($\sum \|u_n\|_\infty < \infty$), souvent seulement sur des parties $[a, +\infty[$ ou $[-A, A]$: elle donne la continuité de la somme et le passage à la limite terme à terme (double limite). Quand elle échoue (séries alternées, supports disjoints), on contrôle directement le **reste** $\sup_x |R_n(x)|$. Pour le **comportement aux bornes** où la convergence normale cesse, on compare la somme à une **intégrale** (série-intégrale à x fixé) ou on reconnaît une **somme de Riemann**, et l'on obtient un équivalent.

Exercice 1 – Deux séries télescopiques de fonctions

Sur $[0, 1]$, on pose $u_n(x) = x^n(1 - x)$.

a) Calculer la somme de $\sum_{n \geq 0} u_n$. La convergence est-elle uniforme sur $[0, 1]$? normale sur $[0, a]$, $a < 1$?

b) Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$, et calculer sa somme.

c) Converge-t-elle normalement sur $[0, 1]$?

Exercice 2 – Une série géométrique en exponentielle

Soit $u_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur $[0, +\infty[$ ($n \geq 1$).

a) Calculer $S(x) = \sum_{n \geq 1} u_n(x)$ pour $x > 0$, et $S(0)$.

b) En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

c) Montrer qu'elle est normale sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

Exercice 3 – La fonction thêta

Soit $\theta(x) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{e}^{-n^2 x}$ pour $x > 0$. On admet $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a) Montrer que θ est continue et décroissante sur $]0, +\infty[$, et déterminer sa limite en $+\infty$.

b) Montrer que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}} \leq \theta(x) \leq 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

c) En déduire un équivalent de θ en 0^+.

Exercice 4 – Équivalent logarithmique en zéro

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(1 + nx)}$ pour $x > 0$.

a) Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$ et que $S(x) \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.

b) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1 + tx)}$.

c) En déduire $S(x) \sim \ln \frac{1}{x}$ en 0^+.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Somme de Riemann et échec de la double limite

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x}{n^2 + x^2}$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que la série converge normalement sur $[0, A]$ mais pas sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que $S(x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$ (encadrer par des intégrales de $t \mapsto \frac{x}{t^2 + x^2}$).
c) Comparer avec $\sum_n \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Exercice 6 – Régularité d'une série trigonométrique

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

a) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et exprimer S'.
b) La série des dérivées secondes converge-t-elle normalement ?
c) Calculer $S'(0)$ et $\int_0^{\pi} S(x)\,dx$ sous forme de séries numériques.

Exercice 7 – Série alternée de logarithmes

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ pour $x \geq 0$, $n \geq 1$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
b) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0, A]$, mais pas normale.
c) En déduire que la somme est continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 8 – Une fonction qui interpole les nombres harmoniques

Soit $f(x) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + x}\right)$ pour $x > -1$.

a) Montrer que la série des termes d'indice $n \geq 2$ converge normalement sur $]-1, A]$ pour tout $A > 0$, et que f est continue et croissante.
b) Montrer que $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$, et en déduire $f(n) = H_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
c) Montrer que $f(x) \to -\infty$ quand $x \to -1^+$.

Exercice 9 – Comportement près d'un pôle

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - x^2}$ pour $x \in]-1, 1[$.

a) Montrer que $T(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 - x^2}$ est définie et continue sur $[-1, 1]$.
b) En déduire un équivalent de $S(x)$ quand $x \to 1^-$.
c) Calculer $T(1)$ par télescopage.

Exercice 10 – Somme continue mais non dérivable au bord

Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$ pour $x \geq 0$.

a) Montrer que S est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
b) Montrer que $\frac{S(0) - S(x)}{x} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1 - e^{-nx}}{x(1 + n^2)}$ pour tout N.
c) En déduire que $\frac{S(x) - S(0)}{x} \to -\infty$ en 0^+ : S n'est pas dérivable en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Convergence uniforme sans convergence normale : supports disjoints

Soit φ continue sur $\mathbb{R}$, nulle hors de $[0,1]$, avec $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=1$ et $0\le\varphi\le 1$, et $u_n(x)=\frac{1}{n}\varphi(x-n)$ $(n\ge 1)$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\sup_x |R_N(x)|\le\frac{1}{N+1}$: convergence uniforme.

c) Montrer que la convergence n'est pas normale.

Exercice 12 – Une somme de sinus impaire

Soit $S(x)=\sum_{n\ge 1}\sin\frac{x}{n^2}$.

a) Montrer que la série converge normalement sur tout segment $[-A,A]$, et que S est continue et impaire.

b) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $S'(0)$.

c) En déduire un équivalent de $S(x)$ en 0.

Exercice 13 – Convergence normale sur tout le segment

Soit $u_n(x)=\frac{x^n-x^{n+1}}{n}$ sur $[0,1]$, $n\ge 1$.

a) Calculer $\|u_n\|_\infty$ et montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

b) Calculer la somme pour $x\in[0,1[$ (on admet $\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$) et pour $x=1$.

c) Vérifier la continuité de la somme en 1.

Exercice 14 – Équivalent en l'infini

Soit $S(x)=\sum_{n\ge 1}\frac{e^{-nx}}{n^2}$ pour $x\ge 0$.

a) Montrer que S est continue sur $[0,+\infty[$ et donner $S(0)$.

b) Montrer que $e^x S(x)=1+\sum_{n\ge 2}\frac{e^{-(n-1)x}}{n^2}$ et que cette dernière série tend vers 0 en $+\infty$.

c) En déduire $S(x)\sim e^{-x}$ en $+\infty$.

Exercice 15 – Synthèse : la fonction êta et le pôle de zêta

Soit $\eta(x)=\sum_{n\ge 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ pour $x>0$.

a) Montrer que la convergence est uniforme sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$, et en déduire que η est continue sur $]0,+\infty[$.

b) Déterminer $\lim_{x\to+\infty}\eta(x)$.

c) Sachant $\eta(1)=\ln 2$ et $\eta(x)=\left(1-2^{1-x}\right)\zeta(x)$ pour $x>1$, montrer que $\zeta(x)\sim\frac{1}{x-1}$ quand $x\to 1^+$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).