Plaquette 4 – Complétude, suites de Cauchy et théorème du point fixe

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Complétude.

— Toute suite de Cauchy est bornée ; une suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

— Les evn de dimension finie sont complets ; un fermé d'un complet est complet.

— Dans un espace complet, $\sum \|u_n\| < +\infty \Rightarrow \sum u_n$ converge.

Point fixe de Banach. Si F est un fermé non vide d'un espace complet, $f(F) \subset F$ et $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$ avec $k < 1$, alors f a un unique point fixe ℓ, limite de $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $x_0 \in F$, et

$$\|x_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

Correction de l'exercice 1 – Q n'est pas complet

a) Par récurrence, u_n est rationnel. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$. Et $u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$ dès que $u_n \geq \sqrt{2}$.

b) Décroissante minorée, elle converge vers $\ell \geq \sqrt{2}$ vérifiant $\ell = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell}$, soit $\ell^2 = 2$. Convergente dans $\mathbb{R}$, elle est de Cauchy, et la condition de Cauchy ne fait intervenir que les u_n rationnels.

c) Une suite de Cauchy de $\mathbb{Q}$ dont la limite dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ (unicité de la limite) :

$$u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{17}{12}, \quad u_3 = \frac{577}{408} \to \sqrt{2}$$

Réponse. (u_n) rationnelle, de Cauchy, de limite $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $\mathbb{Q}$ non complet.

Correction de l'exercice 2 – Les fonctions continues ne sont pas complètes pour la norme 1

a) f_n et f_p coïncident hors de $\left[1, 1 + \frac{1}{\min(n,p)}\right]$ et sont à valeurs dans $[0,1]$: l'intégrale de $|f_n - f_p|$ est majorée par la longueur de cet intervalle.

b) Sur $[0,1]$: $\int_0^1 |f| = \int_0^1 |f - f_n| \leq \|f - f_n\|_1 \to 0$, donc $f = 0$ (continue). Sur $[1+\delta, 2]$: pour $n \geq \frac{1}{\delta}$, $f_n = 1$, donc de même $f = 1$ sur $[1+\delta, 2]$, pour tout $\delta > 0$.

c) f serait discontinue en 1 : aucune limite continue, et

$$(C([0,2]), \|\cdot\|_1) \text{ n'est pas complet}$$

Réponse. (f_n) de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$, « limite » discontinue : espace non complet.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – L'espace des fonctions continues est complet pour la norme infinie

a) $|f_n(x) - f_p(x)| \le \|f_n - f_p\|_\infty$; $\mathbb{R}$ est complet.

b) Pour $\varepsilon > 0$, il existe N avec $|f_n(x) - f_p(x)| \le \varepsilon$ pour $n, p \ge N$ et tout x. En faisant $p \to +\infty$: $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ pour tout x, soit $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$.

c) Limite uniforme de fonctions continues : pour n fixé avec $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$,

$$|f(x) - f(x_0)| \le 2\varepsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)|$$

— et le dernier terme est $\le \varepsilon$ pour x proche de x_0. Donc $f \in C([a,b])$ et $f_n \to f$: l'espace est complet.

Réponse. Limite simple f, convergence uniforme, f continue : $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ complet.

Correction de l'exercice 4 – Séries absolument convergentes de matrices

a) $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \le \frac{\|A\|^k}{k!}$, terme général d'une série convergente ; $M_n(\mathbb{R})$ est complet (dimension finie). Par inégalité triangulaire,

$$\|\exp(A)\| \le \sum \frac{\|A\|^k}{k!} = \mathrm{e}^{\|A\|}$$

b) $\left\|\frac{A^k}{k}\right\| \le \|A\|^k$, série géométrique convergente.

c) $A^2 = 0$: $\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour $\|\cdot\|_\infty$: $\|\exp(A)\| = 1 + |t| \le \mathrm{e}^{|t|}$ ✓.

Réponse. Séries absolument convergentes dans un complet ; $\|\exp A\| \le \mathrm{e}^{\|A\|}$; ici $1 + |t| \le \mathrm{e}^{|t|}$.

Correction de l'exercice 5 – Résolution de x = cos x

a) cos décroît sur $[0,1]$, de 1 à $\cos 1 \approx 0{,}54$: image incluse dans $[0,1]$.
$|\cos'| = |\sin| \le \sin 1$ sur $[0,1]$.

b) Point fixe de Banach sur le fermé $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ complet. Numériquement $\ell \approx 0{,}7391$.

c) $x_1 = 1$, $|x_1 - x_0| = 1$ et

$$|x_n - \ell| \le \frac{0{,}8415^n}{1 - 0{,}8415} \approx 6{,}31 \times 0{,}8415^n$$

— Cette borne est $\le 10^{-3}$ dès que $n \ge \frac{\ln(6{,}31 \times 10^3)}{-\ln 0{,}8415} \approx 50{,}6$, soit $n = 51$ (la convergence réelle est plus rapide, la constante locale étant $\sin \ell \approx 0{,}67$).

Réponse. Contraction de constante $\sin 1$; $\ell \approx 0{,}7391$; 51 itérations suffisent d'après la majoration.

Correction de l'exercice 6 – Une équation intégrale de Fredholm

a) $|Tf(x) - Tg(x)| \le |\lambda| \int_0^1 xt|f - g| \le |\lambda| \|f - g\|_\infty \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{|\lambda|}{2}\|f - g\|_\infty$.

b) $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet : point fixe unique si $\frac{|\lambda|}{2} < 1$.

c) Une solution est de la forme $1 + cx$ avec $c = \lambda \int_0^1 t(1 + ct)\,\mathrm{d}t = \lambda\left(\frac{1}{2} + \frac{c}{3}\right)$, d'où, pour $\lambda \neq 3$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$c = \frac{3\lambda}{2(3-\lambda)}, \qquad f(x) = 1 + \frac{3\lambda x}{2(3-\lambda)}$$

— La solution existe pour tout $\lambda \neq 3$: le point fixe ne donne qu'une condition suffisante ($|\lambda| < 2$).

Réponse. T est $\frac{|\lambda|}{2}$-lipschitzienne ; $f = 1 + \frac{3\lambda x}{2(3-\lambda)}$ pour $\lambda \neq 3$.

Correction de l'exercice 7 – Contraction sur une demi-droite

a) $f \geq 1 \geq 0$. $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$ sur F.

b) F est fermé dans $\mathbb{R}$: unique point fixe, solution de $\ell = \sqrt{1+\ell}$, soit $\ell^2 - \ell - 1 = 0$ avec $\ell \geq 0$:

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

c) Partant de $u_0 = 0$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2}$, $u_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$, et ainsi de suite : le radical infini vaut le nombre d'or.

Réponse. f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $[0, +\infty[$; limite $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Hypothèses nécessaires du point fixe

a) Le point fixe serait $0 \notin]0, 1]$: $]0, 1]$ n'est pas fermé (pas complet).

b) $g(x) - g(y) = (x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right)$ avec $0 \leq 1 - \frac{1}{xy} < 1$ pour $x \neq y$ dans $[1, +\infty[$. Pas de point fixe car $g(x) - x = \frac{1}{x} > 0$. Il manque une constante $k < 1$ **uniforme** : $1 - \frac{1}{xy} \to 1$.

c) $\varphi(x) = |h(x) - x|$ est continue sur le compact K, minimale en x_0. Si $\varphi(x_0) > 0$, alors

$$\varphi(h(x_0)) = |h(h(x_0)) - h(x_0)| < |h(x_0) - x_0| = \varphi(x_0)$$

— ce qui contredit la minimalité. Donc $h(x_0) = x_0$; l'unicité découle de l'inégalité stricte.

Réponse. Il faut un fermé ($]0, 1]$ échoue) et $k < 1$ uniforme ($x + \frac{1}{x}$ échoue) ; sur un compact, l'inégalité stricte suffit.

Correction de l'exercice 9 – Itérée contractante

a) Point fixe de Banach appliqué à f^p.

b) $f^p(f(\ell)) = f(f^p(\ell)) = f(\ell)$: par unicité, $f(\ell) = \ell$. Et tout point fixe de f est point fixe de f^p, d'où l'unicité.

c) $|\cos'| = |\sin|$ atteint 1 : pas de constante < 1 sur $\mathbb{R}$. Mais $(\cos \circ \cos)'(x) = \sin(\cos x) \sin x$, de valeur absolue $\leq \sin 1$ car $\cos x \in [-1, 1]$:

$$|(\cos \circ \cos)(x) - (\cos \circ \cos)(y)| \leq \sin 1 \cdot |x - y|$$

— donc cos a un unique point fixe réel, $\ell \approx 0{,}739$.

Réponse. Si f^p est contractante, f a un unique point fixe ; $\cos \circ \cos$ est $\sin 1$ -lipschitzienne.

Correction de l'exercice 10 – Itérations de Picard

a) $\Phi(0) = 1$, $\Phi^2(0) = 1 + x$, et par récurrence

$$\Phi^n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $|\Phi(y)(x) - \Phi(z)(x)| \le \int_0^x |y - z|$, puis on intègre l'inégalité au rang n : $\int_0^x \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

c) $\|\Phi^n(y) - \Phi^n(z)\|_\infty \le \frac{a^n}{n!}\|y - z\|_\infty$ et $\frac{a^n}{n!} \to 0$: Φ^n est contractante pour n grand. Par l'exercice précédent, Φ a un unique point fixe, limite des $\Phi^n(0)$, c'est-à-dire e^x.

Réponse. $\Phi^n(0) = \sum_{k<n} \frac{x^k}{k!}$; Φ^n contractante pour n grand ; solution e^x.

Correction de l'exercice 11 – Suites de Cauchy : propriétés

a) Pour $\varepsilon = 1$, il existe N avec $\|u_n - u_N\| \le 1$ pour $n \ge N$; alors $\|u_n\| \le \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{N-1}\|, \|u_N\| + 1)$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, soit N (Cauchy) et k avec $\varphi(k) \ge N$ et $\|u_{\varphi(k)} - \ell\| \le \varepsilon$. Pour $n \ge N$:

$$\|u_n - \ell\| \le \|u_n - u_{\varphi(k)}\| + \|u_{\varphi(k)} - \ell\| \le 2\varepsilon$$

c) Une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^d$ est bornée, donc a une sous-suite convergente (Bolzano-Weierstrass), donc converge.

Réponse. Cauchy ⇒ bornée ; Cauchy + sous-suite convergente ⇒ convergente ; $\mathbb{R}^d$ complet.

Correction de l'exercice 12 – Un fermé d'un complet est complet

a) Une suite de Cauchy de F est de Cauchy dans E, converge dans E, et sa limite est dans F (fermé).

b) Si F est complet et $u_n \in F$ converge vers $\ell \in E$, (u_n) est de Cauchy, donc converge dans F ; par unicité de la limite, $\ell \in F$.

c) $O(n)$ et S_n^+ sont fermés dans $M_n(\mathbb{R})$ complet. $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas fermé :

$$\frac{1}{k} I \in GL_n, \qquad \frac{1}{k} I \to 0 \notin GL_n$$

— donc pas complet ($\left(\frac{1}{k} I\right)$ est de Cauchy sans limite dans GL_n).

Réponse. Fermé d'un complet ⇔ complet ; $O(n)$, S_n^+ complets ; GL_n non complet.

Correction de l'exercice 13 – Logarithme matriciel par série

a) $\left\|\frac{N^k}{k}\right\| \le \|N\|^k$, série géométrique convergente, dans un espace complet.

b) $N^2 = 0$: $L = N$ et $\exp(L) = I + N$.

c) Les puissances restent diagonales : $L = \operatorname{diag}\left(\ln\frac{3}{2}, \ln\frac{1}{2}\right)$ (séries de $\ln(1+x)$ en $x = \pm\frac{1}{2}$), et

$$\exp(L) = \operatorname{diag}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = I + N$$

— La série définit un logarithme de $I + N$.

Réponse. Convergence normale ; $L = N$ si $N^2 = 0$; dans les deux cas $\exp(L) = I + N$.

Correction de l'exercice 14 – Suite définie par une série vectorielle

a) $\|S_p - S_n\| \le \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \le \frac{1}{n}$.

b) $\mathbb{R}^2$ est complet : $S_n \to S$, et en faisant $p \to +\infty$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\|S - S_n\| \le \frac{1}{n}$$

c) $\|v_k\|_2 = \frac{1}{k^2}$: il suffit de $n = 100$ termes pour garantir une erreur $\le 10^{-2}$.

Réponse. $\|S_p - S_n\| \le \frac{1}{n}$; reste $\le \frac{1}{n}$; 100 termes.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : une équation fonctionnelle par point fixe

a) $x \mapsto \frac{x}{2}$ envoie $[0,1]$ dans $[0,1]$, donc $T(f)$ est continue. Et $|T(f)(x) - T(g)(x)| = \frac{1}{2}\left|f\left(\frac{x}{2}\right) - g\left(\frac{x}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$.

b) $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet : point fixe unique.

c) $T(0) = x$, $T^2(0) = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} = x\left(1 + \frac{1}{4}\right)$, et par récurrence

$$T^n(0) = x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{4^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{3}x$$

d) $f(x) = \frac{4}{3}x$: $x + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{x}{2} = x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}x$ ✓.

Réponse. T est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne ; solution unique $f(x) = \frac{4}{3}x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).