Plaquette 5 – Continuité uniforme, lipschitzianité et équations fonctionnelles

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Continuités.

— Lipschitzienne ⇒ uniformément continue ⇒ continue ; les réciproques sont fausses.
— **Heine** : une fonction continue sur un compact est uniformément continue.
— **Négation** : f n'est pas uniformément continue s'il existe x_n, y_n avec

$$|x_n - y_n| \to 0 \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$$

— Une fonction uniformément continue sur une partie dense D se prolonge de façon unique en une fonction continue sur $\overline{D}$.
— **Densité** : deux fonctions continues égales sur une partie dense sont égales ; un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non monogène est dense.

Correction de l'exercice 1 – Le carré n'est pas uniformément continu sur R

a) $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$ mais $x_n^2 - y_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$.

b) $|x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \leq 2A|x-y|$ sur $[-A, A]$: x^2 y est $2A$-lipschitzienne, et $\delta = \frac{\varepsilon}{2A}$ convient.

c) Accroissements finis :

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$$

— sin est 1-lipschitzienne, donc uniformément continue.

Réponse. x^2 non uniformément continue sur $\mathbb{R}$ ($2A$-lipschitzienne sur $[-A, A]$) ; sin est 1 -lipschitzienne.

Correction de l'exercice 2 – La racine carrée : uniformément continue mais pas lipschitzienne

a) Pour $x \geq y$: $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} \leq x + y - 2y = x - y$, car $\sqrt{xy} \geq y$.

b) Pour $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon^2$ convient :

$$|x - y| \leq \varepsilon^2 \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$$

c) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$: aucun rapport des accroissements n'est borné.

Réponse. $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$ (höldérienne d'exposant $\frac{1}{2}$) ; non lipschitzienne en 0.

Correction de l'exercice 3 – Le théorème de Heine

a) Négation de la continuité uniforme avec $\delta = \frac{1}{n}$.

b) K compact : $x_{\varphi(n)} \to x \in K$, et $y_{\varphi(n)} \to x$ aussi. Par continuité en x,

$$f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \to f(x) - f(x) = 0$$

— contradiction avec $\geq \varepsilon$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) La fonction prolongée est continue sur $]0,1]$, et en 0 car $|x\sin\frac{1}{x}| \le x$; $[0,1]$ est compact.

Réponse. Extraction de Bolzano-Weierstrass : contradiction ; $x\sin\frac{1}{x}$ prolongée est uniformément continue sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 4 – Prolongement par continuité uniforme

a) Pour $\varepsilon > 0$, soit δ de la continuité uniforme ; (x_n) est de Cauchy, donc $|x_n - x_p| \le \delta$ pour n, p grands, d'où $|f(x_n) - f(x_p)| \le \varepsilon$. $\mathbb{R}$ est complet.

b) Si $x_n \to 0$ et $y_n \to 0$, la suite entrelacée $(x_0, y_0, x_1, y_1, \dots)$ tend vers 0 et son image converge : les deux limites coïncident. On pose $f(0)$ égal à cette limite commune.

c) $\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 (elle vaut 1 en $\frac{1}{2k\pi + \pi/2}$ et -1 en $\frac{1}{2k\pi - \pi/2}$) :

$$\sin\frac{1}{x} \text{ n'est pas prolongeable, donc pas uniformément continue}$$

Réponse. Image d'une suite de Cauchy : de Cauchy ; prolongement en 0 ; $\sin\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue.

Correction de l'exercice 5 – L'équation de Cauchy

a) $f(0) = 2f(0)$, puis $f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, et $f(nx) = nf(x)$ par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$, étendu à $\mathbb{Z}$ par imparité.

b) Pour $r = \frac{p}{q}$: $qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = pf(1)$, d'où $f(r) = ar$.

c) $x \mapsto f(x) - ax$ est continue et nulle sur $\mathbb{Q}$, dense : elle est nulle.

$$f(x) = ax$$

Réponse. f additive et continue : $f(x) = f(1)x$.

Correction de l'exercice 6 – L'équation fonctionnelle du logarithme

a) $g(s+t) = f(\mathrm{e}^s\mathrm{e}^t) = g(s) + g(t)$, et g est continue.

b) Par l'équation de Cauchy, $g(t) = at$ avec $a = g(1) = f(\mathrm{e})$, donc $f(x) = g(\ln x) = a\ln x$. Réciproquement, $a\ln(xy) = a\ln x + a\ln y$: ces fonctions conviennent.

c) h est à valeurs strictement positives, donc $\ln\circ h$ est définie, continue, et vérifie $\ln h(x+y) = \ln h(x) + \ln h(y)$: elle est additive, d'où $\ln h(x) = cx$ avec $c = \ln h(1)$, soit

$$h(x) = \mathrm{e}^{cx}$$

Réponse. $f = a\ln$; $h = \exp(c\,\cdot)$.

Correction de l'exercice 7 – Fonctions invariantes par une homothétie

a) Récurrence : $f(x) = f\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) $\frac{x}{2^n} \to 0$ et f est continue en 0 :

$$f(x) = \lim_n f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$$

c) Non : $f(x) = \sin(2\pi\log_2|x|)$ (et $f(0) = 0$) vérifie $f(2x) = \sin(2\pi(1 + \log_2|x|)) = f(x)$, est continue sur $\mathbb{R}^*$, mais n'est pas constante. La continuité en 0 est essentielle.

Réponse. $f(x) = f(x/2^n) \to f(0)$: f constante ; contre-exemple sans continuité en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Fonctions à deux périodes incommensurables

a) Si T_1, T_2 sont des périodes, $T_1 + T_2$ et $-T_1$ aussi.

b) G est dense (sous-groupe non monogène). Pour x réel, il existe $g_n \in G$ avec $g_n \to x$, et $f(g_n) = f(0)$. Par continuité :

$$f(x) = \lim f(g_n) = f(0)$$

c) L'indicatrice de G : elle vaut 1 sur G et 0 ailleurs, admet tout élément de G pour période, et n'est pas constante ($\frac{1}{2} \notin G$, car $\frac{1}{2} = a + b\sqrt{2}$ imposerait $b = 0$ et $a = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$).

Réponse. $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ dense de périodes : f constante ; contre-exemple 1_G.

Correction de l'exercice 9 – Fonctions périodiques continues

a) $f(\mathbb{R}) = f([0, T])$, image d'un compact par une fonction continue.

b) f est uniformément continue sur $[0, 2T]$ (Heine) : $\delta < T$ associé à ε. Si $|x - y| \leq \delta$, on translate x et y d'un même multiple de T pour avoir $x' \in [0, T]$; alors $y' \in [0, 2T]$ et

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leq \varepsilon$$

c) Oui : hors d'un segment $[-A, A]$, f varie de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ (limites), et sur $[-A - 1, A + 1]$ on applique Heine.

Réponse. f bornée, bornes atteintes ; uniformément continue (Heine sur $[0, 2T]$) ; oui avec limites finies en $\pm\infty$.

Correction de l'exercice 10 – Une équation fonctionnelle résolue par itération

a) $x + 2x = 3x$ ✓.

b) $g(x) + g(2x) = f(x) + f(2x) - 3x = 0$. En itérant : $g(x) = -g\left(\frac{x}{2}\right) = (-1)^n g\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

c) En $x = 0$: $g(0) = -g(0)$, donc $g(0) = 0$. Par continuité en 0 :

$$|g(x)| = \left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} |g(0)| = 0$$

— donc $g = 0$ et $f = \mathrm{id}$.

Réponse. $g(x) = (-1)^n g(x / 2^n) \to 0$: unique solution $f(x) = x$.

Correction de l'exercice 11 – Fonctions höldériennes

a) $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{1/\alpha}$ convient.

b) $\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq C|x - y|^{\alpha - 1} \to 0$ quand $y \to x$: f est dérivable de dérivée nulle, donc constante.

c) Avec l'inégalité admise, $C = 1$ et $\alpha = \frac{1}{3}$. Elle n'est pas lipschitzienne en 0 :

$$\frac{x^{1/3}}{x} = x^{-2/3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

Réponse. Höldérienne ⇒ uniformément continue ; $\alpha > 1$ impose f constante ; $x^{1/3}$ est $\frac{1}{3}$-höldérienne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Fonction lipschitzienne sur une partie dense

a) Lipschitzienne implique uniformément continue sur $\mathbb{Q}$, dense dans $\mathbb{R}$: prolongement continu unique, $\widetilde{f}(x) = \lim f(r_n)$ pour $r_n \to x$ rationnels.

b) Pour x, y réels, $r_n \to x$ et $s_n \to y$: $|f(r_n) - f(s_n)| \leq k|r_n - s_n|$, et en passant à la limite,

$$|\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(y)| \leq k|x - y|$$

c) $x \mapsto |x - \sqrt{2}|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec f sur $\mathbb{Q}$: c'est $\widetilde{f}$ (unicité du prolongement continu).

Réponse. Prolongement continu unique, encore k-lipschitzien ; ici $\widetilde{f}(x) = |x - \sqrt{2}|$.

Correction de l'exercice 13 – Limite uniforme et continuité uniforme

a) Soit $\varepsilon > 0$ et n avec $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$, puis δ associé à f_n et $\frac{\varepsilon}{3}$. Pour $|x - y| \leq \delta$:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon$$

b) $f_n(x) = \min(x^2, n)$ est uniformément continue (constante hors d'un segment), converge simplement vers x^2, qui ne l'est pas.

c) Les sommes partielles sont lipschitziennes (donc uniformément continues), et la convergence est uniforme car $\left|\frac{\sin kx}{k^2}\right| \leq \frac{1}{k^2}$.

Réponse. Limite uniforme de fonctions uniformément continues : uniformément continue ; faux en convergence simple ($\min(x^2, n)$).

Correction de l'exercice 14 – Point fixe et fonction croissante

a) $g(x) = f(x) - x$ vérifie $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$: le TVI fournit un zéro.

b) $A = \{x \mid f(x) \geq x\}$ contient 0, donc c existe. Pour $x \in A$, $x \leq c$ donne $x \leq f(x) \leq f(c)$, d'où $c \leq f(c)$. Puis $f(c) \leq f(f(c))$ (croissance), donc $f(c) \in A$ et $f(c) \leq c$. Ainsi

$$f(c) = c$$

c) Non : $f = \mathrm{id}$ a une infinité de points fixes ; $f(x) = x^2$ en a deux (0 et 1).

Réponse. TVI dans le cas continu ; $c = \sup\{f(x) \geq x\}$ dans le cas croissant ; pas d'unicité en général.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une équation fonctionnelle avec densité

a) L'équation est invariante par ajout d'une constante. Avec $y = 0$:
$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x) + g(0)}{2} = \frac{g(x)}{2}$ car $g(0) = 0$.

b) $g(x + y) = 2g\left(\frac{x + y}{2}\right) = 2 \cdot \frac{g(x) + g(y)}{2} = g(x) + g(y)$.

c) g additive et continue : $g(x) = ax$ (équation de Cauchy). Donc

$$f(x) = ax + b, \qquad a = f(1) - f(0),\ b = f(0)$$

— et les fonctions affines conviennent.

d) g est additive ; continue en un point x_0, elle l'est partout car $g(x + h) - g(x) = g(x_0 + h) - g(x_0)$. On conclut comme en c).

Réponse. $g = f - f(0)$ additive et continue : $f(x) = ax + b$ (affine).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).