Plaquette 3 – Limites et continuité des fonctions de plusieurs variables

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Majorations utiles (avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$) :

$$|x| \leq r, \qquad |y| \leq r, \qquad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{r^2}{2}$$

— Coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; si $|f-\ell| \leq \varepsilon(r)$ **indépendamment de** θ avec $\varepsilon(r) \to 0$, alors $f \to \ell$.

— **Non-existence** : deux chemins menant à des limites différentes.

— Pour $f = \dfrac{x^a y^b}{x^2+y^2}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) : limite nulle en 0 si et seulement si $a+b > 2$.

— Continuité séparée (en x à y fixé, et en y à x fixé) n'entraîne pas la continuité.

Correction de l'exercice 1 – Majoration en coordonnées polaires

a) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, donc $|f(x,y)| = |x|\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq |x|$.

b) $|f(x,y)| \leq |x| \leq r \to 0$: on pose $f(0,0) = 0$.

c) $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\cos^3\theta$, d'où

$$|f| \leq r$$

— uniformément en θ.

Réponse. $|f| \leq |x| \leq r$; prolongement par $f(0,0) = 0$.

Correction de l'exercice 2 – Absence de limite

a) $f(x,0) = 1$ et $f(0,y) = -1$.

b) $f(x,mx) = \dfrac{1-m^2}{1+m^2}$, qui prend toutes les valeurs de $]-1,1]$.

c) Deux chemins donnent des limites différentes : pas de limite. f est bornée par 1 :

$$|x^2-y^2| \leq x^2+y^2$$

— Bornée ne signifie pas convergente.

Réponse. Limites 1 et -1 sur les axes : pas de limite ; $|f| \leq 1$.

Correction de l'exercice 3 – Continuité séparée sans continuité

a) Si $y_0 \neq 0$, $x \mapsto \dfrac{xy_0}{x^2+y_0^2}$ est une fraction rationnelle sans pôle réel. Si $y_0 = 0$, $f(x,0) = 0$ pour tout x. Même raisonnement en y.

b) $f(t,t) = \dfrac{1}{2}$ pour $t \neq 0$, alors que $f(0,0) = 0$:

$$f(t,t) = \frac{1}{2} \not\to 0$$

c) Oui : quotient de polynômes à dénominateur non nul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Continue séparément en chaque variable, mais $f(t,t)=\frac{1}{2}$: non continue en $(0,0)$.

Correction de l'exercice 4 – Limites sur les droites trompeuses

a) Sur $y=mx$: $f=\frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4}=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\to 0$. Sur l'axe $x=0$: $f=0$.

b) $f(y^2,y)=\frac{y^4}{2y^4}=\frac{1}{2}$.

c) La limite vaut 0 sur toutes les droites mais $\frac{1}{2}$ sur la parabole $x=y^2$:

$$f \text{ n'a pas de limite en } (0,0)$$

Réponse. 0 sur toute droite, $\frac{1}{2}$ sur $x=y^2$: pas de limite.

Correction de l'exercice 5 – Une famille de quotients

a) $f_{a,b}=r^{a+b-2}\cos^a\theta\sin^b\theta$.

b) $|f_{a,b}|\le r^{a+b-2}\to 0$ si $a+b>2$.

c) Si $a+b=2$, $f_{a,b}=\cos^a\theta\sin^b\theta$ ne dépend que de θ et n'est pas identiquement nulle : par exemple sur la diagonale $\theta=\frac{\pi}{4}$ elle vaut $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$. Si $a+b<2$, sur la diagonale

$$f_{a,b}=r^{a+b-2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{a+b}\to+\infty$$

Réponse. $f_{a,b}=r^{a+b-2}\cos^a\theta\sin^b\theta$; limite nulle ssi $a+b>2$.

Correction de l'exercice 6 – Prolongement d'un quotient exponentiel

a) Pour $x\neq 0$ et $y\neq 0$: $\frac{e^{xy}-1}{x}=y\frac{e^{xy}-1}{xy}$. Si $y=0$, les deux membres sont nuls. Et pour $x=0$: $y\varphi(0)=y$.

b) φ est continue sur $\mathbb{R}^*$, et $\varphi(u)\to 1$ en 0 (dérivée de l'exponentielle en 0).

c) $(x,y)\mapsto y\varphi(xy)$ est composée et produit de fonctions continues :

$$f(x,y)=y\,\varphi(xy)$$

— continue sur $\mathbb{R}^2$.

Réponse. $f(x,y)=y\varphi(xy)$, φ continue : f continue sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 7 – Limite à l'infini

a) $|x+y|\le\sqrt{2}\,r$, donc $|f|\le\frac{\sqrt{2}\,r}{r^2+1}\to 0$.

b) Il existe R avec $|f|\le\frac{1}{4}$ hors de la boule $B_f(0,R)$; sur ce compact, f continue est bornée et atteint ses bornes. Comme $f(1,1)=\frac{2}{3}>\frac{1}{4}$, le maximum global est atteint dans la boule.

c) $|x+y|\le\sqrt{2}\,r$ donne $f\le\frac{\sqrt{2}\,r}{r^2+1}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $r^2+1\ge 2r$), avec égalité pour $r=1$ et $x=y>0$:

$$\max f=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f \to 0$ à l'infini ; $\max f = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Correction de l'exercice 8 – Limite d'un sinus cardinal

a) Avec $u = x^2 + y^2 \to 0$, $\frac{\sin u}{u} \to 1$ (composition des limites).

b) $f = \mathrm{sinc} \circ q$ avec $q(x, y) = x^2 + y^2$ continue et sinc (prolongée par 1) continue.

c) $f = 0 \Leftrightarrow \sin(x^2 + y^2) = 0$ avec $x^2 + y^2 > 0$:

$$\{f = 0\} = \bigcup_{k \geq 1} \left\langle x^2 + y^2 = k\pi \right\rangle$$

— réunion de cercles concentriques de rayons $\sqrt{k\pi}$; fermé comme image réciproque de $\{0\}$.

Réponse. $f \to 1$; prolongement continu ; zéros : cercles de rayons $\sqrt{k\pi}$, $k \geq 1$.

Correction de l'exercice 9 – Prolongement d'un quotient par la norme

a) $|xy| \leq \frac{r^2}{2}$, donc $|f| \leq \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2}$.

b) $f(0, 0) = 0$.

c) $f(t\cos\theta, t\sin\theta) = t\cos\theta\sin\theta = \frac{t}{2}\sin 2\theta$, fonction affine de t de pente

$$\frac{\sin 2\theta}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

— donc $\frac{1}{2}$-lipschitzienne (a fortiori 1-lipschitzienne).

Réponse. $|f| \leq \frac{r}{2}$, $f(0, 0) = 0$; sur chaque rayon, $f = \frac{t}{2}\sin 2\theta$.

Correction de l'exercice 10 – Image réciproque et ouverts du plan

a) Intersection des ouverts $\{x^2 + y^2 < 1\}$ et $\{x > 0\}$ (images réciproques d'ouverts par des fonctions continues).

b) F est l'image réciproque de $\{0\}$ par $(x, y) \mapsto \sin(xy)$ continue : fermé. Il est formé des hyperboles

$$xy = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

— (les axes pour $k = 0$).

c) $\{|x| + |y| < 1\}$ est ouvert (norme 1 continue), et $\{y \neq x\}$ est le complémentaire du fermé $\{y - x = 0\}$: intersection de deux ouverts.

Réponse. U, V ouverts ; $F = \bigcup_k \{xy = k\pi\}$ fermé.

Correction de l'exercice 11 – Composition et continuité

a) Composée de $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ (continue, à valeurs dans $[1, +\infty[$ et de ln continue sur $]0, +\infty[$.

b) $D = \{xy \geq 1\}$ (deux régions délimitées par l'hyperbole $xy = 1$) ; composée de $(x, y) \mapsto xy - 1$ (continue, à valeurs ≥ 0 sur D) et de $\sqrt{\cdot}$ continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Formule avec la valeur absolue, continue. Puis $|\max(a, b) - \max(a', b')| \leq \max(|a - a'|, |b - b'|)$:

$$|h(p) - h(q)| \leq \|p - q\|_\infty$$

Réponse. f continue ; g continue sur $\{xy \geq 1\}$; max est 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Fonction homogène de degré zéro

a) $\frac{(tx,ty)}{\|(tx,ty)\|} = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$ pour $t > 0$.

b) Si g prend deux valeurs différentes en u et v du cercle, alors $f(tu) \to g(u)$ et $f(tv) \to g(v)$ quand $t \to 0^+$: pas de limite. Si g est constante, f aussi.

c) En polaires, $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, donc

$$g(\cos\theta, \sin\theta) = \cos 2\theta$$

— non constante : pas de limite en 0 (cohérent avec l'exercice précédent sur ce quotient).

Réponse. f homogène de degré 0 : limite en 0 ssi g constante ; ici $g = \cos 2\theta$.

Correction de l'exercice 13 – Continuité des valeurs propres en taille 2

a) Composées de fonctions continues (la racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$).

b) $\lambda_+(M_\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$ et $\lambda_+(M_0) = 1$, alors que $\|M_\varepsilon - M_0\|_\infty = \varepsilon$. Le rapport

$$\frac{|\lambda_+(M_\varepsilon) - \lambda_+(M_0)|}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \to +\infty$$

— n'est pas borné.

c) Les valeurs propres dépendent continûment de la matrice, mais peuvent être très sensibles près d'une matrice non diagonalisable (ici $M_0 = J_2(1)$).

Réponse. $\lambda_\pm$ continues ; $\lambda_+(M_\varepsilon) - 1 = \sqrt{\varepsilon}$: non lipschitzienne.

Correction de l'exercice 14 – Fonction continue sur un fermé borné

a) K est compact (fermé borné en dimension finie) et f continue.

b) À l'intérieur, un extremum est un point critique : $\partial_x f = 2x + y = 0$ et $\partial_y f = -1 + x = 0$ donnent $(1, -2) \notin K$. Les extrémums sont donc atteints sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

c) Sur K : $0 \le x^2 \le 1$, $|y| \le 1$, $|xy| \le \frac{1}{2}$, d'où

$$-\frac{3}{2} \le f(x,y) \le \frac{5}{2}$$

— (encadrement grossier ; par exemple $f(0,1) = -1$ et $f(0,-1) = 1$ sont des valeurs atteintes).

Réponse. K compact : bornes atteintes, sur le bord (pas de point critique intérieur) ; $-\frac{3}{2} \le f \le \frac{5}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète d'une fonction de deux variables

a) Hors de l'origine, quotient de polynômes. En 0 : $|x^3 + y^3| \le |x|x^2 + |y|y^2 \le r(x^2+y^2)$, d'où $|f| \le r \to 0$.

b) $f(x, mx) = \frac{1+m^3}{1+m^2}x$, donc $\frac{f(t,mt)}{t} \to \frac{1+m^3}{1+m^2}$: la « dérivée dans la direction $(1,m)$ » dépend de m de façon non linéaire.

c) $|f| \le \frac{|x|x^2 + |y|y^2}{x^2+y^2} \le \max(|x|, |y|)$ (moyenne pondérée de $|x|$ et $|y|$).

d) $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ et $x^2 - xy + y^2 > 0$ hors de l'origine. Donc f a le signe de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$x + y$:

$$\{f = 0\} = \{x + y = 0\}$$

— (la droite, origine comprise).

Réponse. $|f| \leq r$: continue ; $\frac{f(t, mt)}{t} \to \frac{1 + m^3}{1 + m^2}$; f du signe de $x + y$, nulle sur $y = -x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).