Plaquette 1 – Suites d'un evn, continuité, complétude et points fixes

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Suites dans un evn.

— $x_n \to x$ signifie $\|x_n - x\| \to 0$. La limite est **unique**, et toute suite convergente est **bornée**.

— En **dimension finie**, la convergence équivaut à la convergence **coordonnée par coordonnée** (toutes les normes étant équivalentes).

— **Suite de Cauchy** : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p, q \geq N,\ \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$. Toute suite convergente est de Cauchy ; la réciproque définit la **complétude**.

— **Espace de Banach** : evn **complet**. Tout evn de **dimension finie** est complet ; $C([a\,;b])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ l'est aussi, mais pas muni de $\|\cdot\|_1$.

Caractérisations séquentielles.

— F est **fermé** $\Leftrightarrow$ toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F.

— $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x$ est limite d'une suite d'éléments de A.

— f est **continue** en $a \Leftrightarrow$ pour toute suite $x_n \to a$, $f(x_n) \to f(a)$.

Continuité.

— Image réciproque d'un **ouvert** par une application continue : **ouvert**. D'un fermé : **fermé**.

— **Théorème des bornes** : une fonction continue sur un **compact** (fermé borné, en dimension finie) est bornée et atteint ses bornes.

— L'image d'un **compact** par une application continue est compacte ; l'image d'un **connexe par arcs** est connexe par arcs.

— **Théorème de Heine** : une fonction continue sur un compact est **uniformément continue**.

Point fixe de Banach. Si X est complet (ou fermé dans un complet) et $f : X \to X$ est **contractante** (k-lipschitzienne avec $k < 1$), alors f admet un **unique** point fixe ℓ, et pour tout $x_0 \in X$ la suite $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ℓ avec

$$\|x_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

Correction de l'exercice 1 – Convergence coordonnée par coordonnée

En **dimension finie**, on étudie chaque coordonnée séparément.

— Première : $\dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \to 1$.

— Seconde : $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$, donc la coordonnée tend vers 0.

— **Conclusion** : $u_n \to (1, 0)$.

— **Contrôle avec une norme** : $\|u_n - (1,0)\|_\infty = \max\left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \to 0$ ✓

— **Point important** : la conclusion ne dépend pas de la norme choisie, puisqu'elles sont toutes **équivalentes** en dimension finie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $u_n \to (1, 0)$.

Correction de l'exercice 2 – Fermé par les suites

Caractérisation séquentielle. Soit (A_k) une suite de matrices symétriques convergeant vers A.

— La convergence dans $M_n(\mathbb{R})$ (dimension finie) équivaut à la convergence **coefficient par coefficient**.
— Pour tous i, j : $(A_k)_{ij} = (A_k)_{ji}$; en passant à la limite, $A_{ij} = A_{ji}$.
— Donc A est symétrique : $S_n(\mathbb{R})$ est **fermé**.
— **Autre preuve** : $S_n(\mathbb{R}) = \ker\left(M \mapsto M - M^{\mathrm{T}}\right)$, noyau d'une application **linéaire continue**, donc image réciproque du fermé $\{0\}$.
— **Généralisation** : tout **sous-espace vectoriel** d'un espace de dimension finie est fermé.

Réponse. Passage à la limite dans $(A_k)_{ij} = (A_k)_{ji}$.

Correction de l'exercice 3 – Suite de Cauchy

Pour $q > p$:

$$|u_q - u_p| = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}$$

— La majoration utilise $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$ (télescopage).
— Pour $\varepsilon > 0$ donné, il suffit de prendre $p \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$: la suite est **de Cauchy**.
— $\mathbb{R}$ étant **complet**, la suite **converge**.
— **Valeur de la limite** : $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1{,}6449$ (formule d'Euler, hors programme de ce chapitre).
— **Intérêt de la méthode** : on prouve la convergence **sans connaître la limite** — c'est tout l'apport de la complétude.

Réponse. $|u_q - u_p| \leq \dfrac{1}{p}$: suite de Cauchy, donc convergente dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 – Espace non complet

On construit une suite de Cauchy dont la limite n'est pas continue.

— Soit f_n affine par morceaux : $f_n = 0$ sur $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$, $f_n = 1$ sur $\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\,;1\right]$, affine entre les deux.
— **Cauchy** : pour p, q grands, $\|f_p - f_q\|_1$ est majorée par l'aire du petit triangle de largeur $\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|$, donc tend vers 0.
— **Limite** : $\|f_n - g\|_1 \to 0$ où g est la fonction **indicatrice** de $\left]\frac{1}{2}\,;1\right]$, qui n'est **pas continue**.
— Si (f_n) convergeait dans $C([0\,;1])$ vers une fonction continue h, on aurait $\|g - h\|_1 = 0$, donc $g = h$ presque partout : impossible pour une fonction continue.
— **Conclusion** : l'espace n'est **pas complet** pour $\|\cdot\|_1$.
— **Contraste** : muni de $\|\cdot\|_\infty$, il **est** complet — une limite uniforme de fonctions continues est continue.

Réponse. Une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|_1$ « converge » vers une fonction discontinue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Continuité et suites

On teste plusieurs **chemins**.

— **Le long de** $y = 0$ **ou** $x = 0$: $f = 0$.

— **Le long de** $y = x$: $f(x, x) = \dfrac{x^3}{x^4 + x^2} = \dfrac{x}{x^2 + 1} \to 0$.

— **Le long de la parabole** $y = x^2$:

$$f\left(x, x^2\right) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

— Cette suite de points tend vers l'origine mais f y vaut constamment $\dfrac{1}{2} \neq 0$.

— **Conclusion** : f n'est **pas continue** en $(0, 0)$.

— **Leçon** : tester les **droites** ne suffit pas. Ici toutes les droites donnent la limite 0, mais une parabole révèle la discontinuité — il faut une majoration valable sur **tous** les chemins pour conclure positivement.

Réponse. Non : $f\left(x, x^2\right) = \dfrac{1}{2}$ le long de $y = x^2$.

Correction de l'exercice 6 – Point fixe de Banach

a) - **Stabilité** : f est dérivable, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2}$, nulle en $x = \sqrt{2}$.

— f décroît sur $\left[1\,;\sqrt{2}\,\right]$ puis croît. Valeurs : $f(1) = 1{,}5$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \approx 1{,}414$, $f(2) = 1{,}5$.

— Donc $f(X) \subset [1{,}414\,;1{,}5] \subset X$ ✓

— **Contraction** : sur $[1\,;2]$, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x^2} \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{4}\right]$, donc $|f'| \leq \dfrac{1}{2}$.

— L'IAF donne $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$: f est $\frac{1}{2}$**-contractante**.

b) $X = [1\,;2]$ est un **fermé** de $\mathbb{R}$ complet, donc complet.

— Le **théorème de Banach** s'applique : f a un unique point fixe ℓ, limite de la suite quel que soit $u_0 \in X$.

— **Calcul** : $\ell = \dfrac{\ell}{2} + \dfrac{1}{\ell}$ donne $\dfrac{\ell}{2} = \dfrac{1}{\ell}$, soit $\ell^2 = 2$ et $\ell = \sqrt{2}$.

— **Vitesse** : $|u_n - \sqrt{2}| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \sqrt{2}|$ — au moins une décimale tous les 3 ou 4 pas (la convergence réelle est même quadratique, $f'(\sqrt{2}) = 0$).

Réponse. b) $u_n \to \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Théorème des bornes

— D est **fermé et borné** dans $\mathbb{R}^2$, donc **compact** ; f est continue : elle est bornée et **atteint ses bornes**.

— **Minimum** : $f \geq 0$ et $f(0, 0) = 0$ — le minimum vaut 0, atteint à l'origine.

— **Maximum** : sur D, $f(x, y) = x^2 + 2y^2 = \left(x^2 + y^2\right) + y^2 \leq 1 + y^2 \leq 2$.

— L'égalité exige $x^2 + y^2 = 1$ et $y^2 = 1$, donc $(x, y) = (0, \pm 1)$, où $f = 2$.

— **Conclusion** : minimum 0 en $(0, 0)$, maximum 2 en $(0, \pm 1)$.

— **Remarque** : il n'y a **pas** de point critique intérieur autre que l'origine ; le maximum est atteint sur le **bord**, ce qui est fréquent en optimisation sous contrainte.

Réponse. Minimum 0 en $(0, 0)$; maximum 2 en $(0, \pm 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Image continue d'un compact

— f est continue sur le **compact** K : elle **atteint son minimum** en un point $a \in K$ (théorème des bornes).
— Posons $m = f(a)$.
— Par hypothèse, $f(a) > 0$, donc $m > 0$.
— Et par définition du minimum, $f(x) \geq m$ pour tout $x \in K$.
— **Où la compacité est essentielle** : sur $K =]0\,;1]$ (non fermé), $f(x) = x$ est continue strictement positive mais son infimum est 0, non atteint — aucun $m > 0$ ne convient.
— **Application typique** : cet argument sert à minorer un dénominateur, garantir l'inversibilité uniforme, ou établir l'équivalence des normes en dimension finie (on minore N sur la sphère unité, qui est compacte).

Réponse. Le minimum est atteint et strictement positif.

Correction de l'exercice 9 – Équivalence des normes

Soit E de dimension n, de base (e_i), $\|x\|_\infty = \max|x_i|$ la norme « des coordonnées » et N une norme quelconque.

Étape 1 — majoration. Par inégalité triangulaire et homogénéité,

$$N(x) = N\left(\sum x_i e_i\right) \leq \sum |x_i| N(e_i) \leq \left(\sum_i N(e_i)\right)\|x\|_\infty = \beta\|x\|_\infty$$

— On en déduit que N est β**-lipschitzienne** pour $\|\cdot\|_\infty$, donc **continue** pour cette norme.

Étape 2 — minoration. La **sphère unité** $S = \left\{\|x\|_\infty = 1\right\}$ est fermée et bornée, donc **compacte** (Borel-Lebesgue, via l'identification à $\mathbb{R}^n$).

— N y est continue et strictement positive (elle ne s'annule qu'en $0 \notin S$), donc y atteint un minimum $\alpha > 0$.
— Par homogénéité, $N(x) \geq \alpha\|x\|_\infty$ pour tout x.

Conclusion : $\alpha\|x\|_\infty \leq N(x) \leq \beta\|x\|_\infty$ — toute norme est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, donc les normes sont **deux à deux équivalentes**.

— **Conséquences** : en dimension finie, ouverts, suites convergentes, applications continues et compacts ne dépendent **pas** de la norme.

Réponse. Majoration par l'inégalité triangulaire, minoration par compacité de la sphère.

Correction de l'exercice 10 – Suite matricielle

— **Norme subordonnée à** $\|\cdot\|_\infty$ (max des sommes par ligne) : $|||A|||_\infty = \max(0{,}7\,;0{,}3) = 0{,}7 < 1$.
— **Sous-multiplicativité** : $|||A^k||| \leq |||A|||^k = 0{,}7^k \to 0$.
— Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, $A^k \to 0$ **coefficient par coefficient**.
— **Contrôle par le spectre** : A est triangulaire, de valeurs propres 0,5 et 0,3, de modules < 1 — c'est le **critère général** : $A^k \to 0 \Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres sont de module < 1 (rayon spectral < 1).
— **Vérification numérique** : A^{10} a pour coefficient dominant $0{,}5^{10} \approx 9{,}8 \times 10^{-4}$ ✓
— **Application** : c'est la condition de convergence des **méthodes itératives** $x_{k+1} = Ax_k + b$.

Réponse. $|||A|||_\infty = 0{,}7 < 1$ donc $A^k \to 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Uniforme continuité

— **Sur** $[0\,;1]$: f est continue sur un **compact**, donc uniformément continue par le **théorème de Heine**. Concrètement, $|f'| \leq 2$ donne $|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$.

— **Sur** $\mathbb{R}$: **non**. Prenons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$.

— $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$, mais

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$$

— L'écart des images ne tend pas vers 0 : f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

— **Explication** : la pente $f'(x) = 2x$ n'est pas **bornée** sur $\mathbb{R}$ — une fonction dérivable à dérivée bornée est lipschitzienne, donc uniformément continue.

Réponse. Oui sur $[0\,;1]$ (Heine) ; non sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 12 – Valeurs d'adhérence d'une suite du plan

a) $\cos\frac{n\pi}{2}$ vaut $1, 0, -1, 0$ selon $n \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$. Les quatre sous-suites tendent vers $(1,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$.

b) Les sous-suites extraites selon les classes modulo 4 recouvrent tous les indices, donc toute valeur d'adhérence est l'une de ces limites :

$$\mathrm{Adh}(u) = \{(1,0), (0,0), (-1,0)\}$$

— Plusieurs valeurs d'adhérence : pas de convergence.

c) Si (u_n) ne tend pas vers l'unique valeur d'adhérence ℓ, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite restant hors de $B(\ell, \varepsilon)$; bornée, elle admet (Bolzano-Weierstrass) une sous-suite convergente, de limite $\neq \ell$: contradiction.

Réponse. Valeurs d'adhérence $(1,0)$, $(0,0)$, $(-1,0)$; pas de convergence.

Correction de l'exercice 13 – Limites en l'origine

a) Sur la droite $y = mx$: $f = \frac{m}{1+m^2}$, qui dépend de m. Pas de limite.

b) $|g(x,y)| \leq \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq |y|$, donc $g \to 0$.

c) Sur $y = mx$: $h = \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \frac{mx}{x^2+m^2} \to 0$. Mais sur $y = x^2$:

$$h(x, x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

— Pas de limite en $(0,0)$, bien que la limite le long de toute droite soit nulle.

Réponse. f : pas de limite ; $g \to 0$; h : 0 sur les droites, $\frac{1}{2}$ sur $y = x^2$, pas de limite.

Correction de l'exercice 14 – Prolongement par continuité

a) Avec $u = xy$: $\left|\frac{\sin(xy)}{y} - x\right| = \frac{|\sin(xy) - xy|}{|y|} \leq \frac{|x|^3|y|^3}{6|y|}$.

b) et c) En $(x_0, 0)$, pour (x, y) voisin : si $y \neq 0$,

$$|f(x,y) - x_0| \leq |f(x,y) - x| + |x - x_0| \leq \frac{|x|^3 y^2}{6} + |x - x_0|$$

— et si $y = 0$, $|f(x,0) - x_0| = |x - x_0|$. Les deux tendent vers 0 : le prolongement est continu en tout $(x_0, 0)$, et continu ailleurs comme quotient de fonctions continues.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $|f(x,y)-x| \le \dfrac{|x|^3 y^2}{6}$; prolongement $f(x,0)=x$ continu sur $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : méthode de Newton

a) $g'(x)=3x^2$, donc

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3-2}{3u_n^2} = \frac{3u_n^3-u_n^3+2}{3u_n^2} = \frac{2u_n}{3} + \frac{2}{3u_n^2}$$

b) - $u_0 = 1{,}5$: $u_1 = 1 + \dfrac{2}{3\times 2{,}25} \approx 1 + 0{,}296296 = 1{,}296296$.

— $u_2 = \dfrac{2\times 1{,}296296}{3} + \dfrac{2}{3\times 1{,}680384} \approx 0{,}864198 + 0{,}396734 = 1{,}260932$.

— **Cible** : $\sqrt[3]{2} = 1{,}259921$.

— **Erreurs** : $|u_0-\ell| = 0{,}240$; $|u_1-\ell| = 0{,}0364$; $|u_2-\ell| = 0{,}00101$.

— L'erreur est approximativement **élevée au carré** à chaque étape ($0{,}0364^2 \approx 0{,}00132$, du bon ordre ; l'étape suivante donne 8×10^{-7}) : la convergence est **quadratique**.

— **Explication théorique** : la fonction d'itération φ vérifie $\varphi'(\ell)=0$, ce qui fait disparaître le terme d'ordre 1 dans le développement de l'erreur — Newton double le nombre de décimales exactes à chaque pas.

Réponse. b) $u_1 \approx 1{,}29630$, $u_2 \approx 1{,}26093$; convergence quadratique vers $\sqrt[3]{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).