Plaquette 2 – Suites dans un evn : convergence, valeurs d'adhérence, récurrences

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Suites dans un evn de dimension finie.

- $u_n \to \ell \Leftrightarrow$ chaque coordonnée converge ; indépendant de la norme.
- Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée admet une sous-suite convergente.
- Suite bornée convergente $\Leftrightarrow$ une unique valeur d'adhérence.
- **Récurrence linéaire** $X_{n+1} = AX_n$: $X_n = A^n X_0$, comportement donné par le spectre de A.
- **Contraction** : si $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$ avec $k < 1$ sur un fermé stable, alors $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers l'unique point fixe ℓ et

$$\|x_n - \ell\| \leq \frac{k^n}{1-k}\|x_1 - x_0\|$$

Correction de l'exercice 1 – Convergence coordonnée par coordonnée

a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}$; $n\sin\frac{1}{n} \to 1$; $\frac{\ln n}{n} \to 0$.

b) En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et la convergence équivaut à celle des coordonnées :

$$u_n \to \ell = (\mathrm{e}, 1, 0)$$

c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} \sim -\frac{\mathrm{e}}{2n}$, $n\sin\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{6n^2}$, et $\frac{\ln n}{n}$ domine $\frac{1}{n}$. Donc $\|u_n - \ell\|_\infty \sim \frac{\ln n}{n}$.

Réponse. $u_n \to (\mathrm{e}, 1, 0)$; $\|u_n - \ell\|_\infty \sim \frac{\ln n}{n}$.

Correction de l'exercice 2 – Une limite matricielle

a) $\varphi(z)\varphi(z') = \varphi(zz')$ par calcul direct (c'est la matrice de la multiplication par z dans la base $(1, i)$) ; φ est linéaire, donc continue en dimension finie, et injective.

b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix} = \varphi\left(1 - \frac{i}{n}\right)$, et φ conserve les puissances.

c) $\left(1-\frac{i}{n}\right)^n \to \mathrm{e}^{-i}$ (car $n\ln\left(1-\frac{i}{n}\right) \to -i$), donc par continuité

$$M_n \to \varphi(\mathrm{e}^{-i}) = \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$$

Réponse. $M_n \to \begin{pmatrix} \cos 1 & \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$ (rotation d'angle -1).

Correction de l'exercice 3 – Point fixe d'une contraction du plan

a) Par l'inégalité des accroissements finis, $|\cos y - \cos y'| \leq |y - y'|$ et $|\sin x - \sin x'| \leq |x - x'|$, d'où

$$\|f(p) - f(q)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|p - q\|_\infty$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Théorème du point fixe ($\mathbb{R}^2$ est complet).

c) $p_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\|p_1 - p_0\| = \frac{1}{2}$, donc $\|p_n - \ell\|_\infty \le \frac{(1/2)^n}{1/2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$. Numériquement, $\ell \approx (0{,}4864;\ 0{,}2337)$.

Réponse. f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne ; unique point fixe $\ell \approx (0{,}486;\ 0{,}234)$; erreur $\le 2^{-n}$.

Correction de l'exercice 4 – Une récurrence linéaire d'ordre 2

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\chi_A = X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = (X-1)\left(X + \frac{1}{2}\right)$.

b) Valeurs propres distinctes : $u_n = \alpha \cdot 1^n + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

c) $u_n \to \alpha$. Invariant : $u_{n+1} + 2u_{n+2} = u_{n+1} + u_{n+1} + u_n = u_n + 2u_{n+1}$. En passant à la limite : $3\alpha = u_0 + 2u_1$, soit

$$\lim u_n = \frac{u_0 + 2u_1}{3}$$

Réponse. $\mathrm{Sp}A = \{1, -\frac{1}{2}\}$; $u_n \to \frac{u_0 + 2u_1}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Puissances d'une rotation

a) $\|R^n\|_2 = 1$. Si $R^n \to L$, alors $R^{n+1} = RR^n \to RL$ et $L = RL$; L est limite de matrices orthogonales, donc orthogonale (fermé), inversible, d'où $R = I$, exclu.

b) Pour $\varphi \in [0, 2\pi[$, il existe $n_k \to +\infty$ avec $n_k\theta \bmod 2\pi \to \varphi$ (densité, en évitant un nombre fini d'indices), d'où par continuité

$$R^{n_k} = R_{n_k\theta} \to R_\varphi$$

— Inversement, toute valeur d'adhérence est dans le fermé $SO(2)$.

c) $R^3 = I$: la suite est périodique, de valeurs d'adhérence I, R, R^2.

Réponse. (R^n) bornée non convergente ; valeurs d'adhérence : $SO(2)$ si $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$; $\{I, R, R^2\}$ si $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 6 – Moyenne arithmético-géométrique

a) Inégalité arithmético-géométrique : $b_{n+1} \le a_{n+1}$ (pour $n \ge 0$, et $b_0 \le a_0$). Puis $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ge \sqrt{b_n^2} = b_n$ et $a_{n+1} \le \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$.

b) $a_{n+1} - b_{n+1} \le a_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2}$. Ainsi $0 \le a_n - b_n \le \frac{1}{2^n}$: les suites sont adjacentes et

$$\lim a_n = \lim b_n = M$$

c) $a_1 = 1{,}5$, $b_1 = \sqrt{2} \approx 1{,}41421$, $a_2 \approx 1{,}457107$, $b_2 \approx 1{,}456475$. Donc $1{,}4564 \le M \le 1{,}4572$ (en fait $M \approx 1{,}456791$, la convergence est quadratique).

Réponse. Suites adjacentes, $a_n - b_n \le 2^{-n}$; $M \in [b_2, a_2] \approx [1{,}4565;\ 1{,}4571]$.

Correction de l'exercice 7 – Valeurs d'adhérence d'une suite réelle

a) $u_{2k} \to 1$, $u_{2k+1} \to -1$: valeurs d'adhérence $\{-1, 1\}$.

b) $\cos\frac{2n\pi}{3}$ vaut 1, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ selon n modulo 3, et la perturbation tend vers 0 : $\left\{1, -\frac{1}{2}\right\}$.

c) $w_{2k} = 0$ et $w_{2k+1} = 2(2k+1) \to +\infty$. La seule valeur d'adhérence (réelle) est 0, mais la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

suite n'est pas bornée et ne converge pas :

$$\mathrm{Adh}(w) = \{0\}, \qquad w \text{ diverge}$$

— L'hypothèse « bornée » est nécessaire dans le critère d'unicité de la valeur d'adhérence.

Réponse. $\{-1, 1\}$; $\{1, -\frac{1}{2}\}$; w : seule valeur d'adhérence 0 mais divergente (non bornée).

Correction de l'exercice 8 – Moyennes de Cesàro dans un evn

a) Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $\|u_k - \ell\| \le \varepsilon$ pour $k > N$. Alors

$$\|c_n - \ell\| \le \frac{1}{n}\sum_{k \le N} \|u_k - \ell\| + \frac{n-N}{n}\varepsilon$$

— et le premier terme tend vers 0 : $\limsup \|c_n - \ell\| \le \varepsilon$.

b) $c_n \to 0$ (sommes partielles bornées), mais (u_n) diverge.

c) On applique a) à $v_k = u_{k+1} - u_k \to a$: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{u_{n+1} - u_1}{n} \to a$, d'où $\frac{u_n}{n} \to a$.

Réponse. Cesàro : $u_n \to \ell \Rightarrow c_n \to \ell$ (réciproque fausse) ; $u_{n+1} - u_n \to a \Rightarrow \frac{u_n}{n} \to a$.

Correction de l'exercice 9 – Suites de fonctions dans l'espace des fonctions continues

a) $\|f_n\|_\infty \le \frac{1}{n} \to 0$.

b) $g_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$ s'annule en $x_n = \frac{n}{n+1}$, d'où

$$\|g_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{\mathrm{e}n} \to 0$$

c) $h_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$: $\|h_n\|_\infty \ge \frac{1}{2}$, pas de convergence vers 0 (seule limite possible, car $h_n(x) \to 0$ pour tout x). Pour $\|\cdot\|_1$: $\int_0^1 h_n = \frac{\ln(1+n^2)}{2n} \to 0$.

Réponse. $f_n \to 0$; $\|g_n\|_\infty \sim \frac{1}{\mathrm{e}n} \to 0$; $h_n \to 0$ pour $\|\cdot\|_1$, pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 10 – Suite récurrente et intervalle stable

a) f est décroissante, $f(1) = \frac{1}{2}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$: $f(I) = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset I$. Et $|f'(x)| = \frac{1}{(1+x)^2} \le \frac{1}{(3/2)^2} = \frac{4}{9}$ sur I.

b) I est fermé dans $\mathbb{R}$ complet : point fixe unique, solution de $\ell^2 + \ell - 1 = 0$:

$$\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$$

c) $|u_n - \ell| \le \left(\frac{4}{9}\right)^n |u_0 - \ell| \le \left(\frac{4}{9}\right)^n \times 0{,}382$. (Les u_n sont des quotients de nombres de Fibonacci consécutifs.)

Réponse. f contractante sur $[\frac{1}{2}, 1]$; $u_n \to \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, erreur $\le 0{,}382\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

Correction de l'exercice 11 – Une suite de Cauchy dans un evn

a) Pour $p > q$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\|u_p - u_q\| \leq \sum_{k=q}^{p-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{2}{2^q} \to 0$$

b) Dans un espace complet, toute suite de Cauchy converge.

c) Non : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$ mais $\sqrt{n} \to +\infty$. C'est la **sommabilité** des écarts qui compte, pas leur seule convergence vers 0.

Réponse. $\|u_p - u_q\| \leq 2^{1-q}$: Cauchy ; $\sqrt{n}$ montre que $u_{n+1} - u_n \to 0$ ne suffit pas.

Correction de l'exercice 12 – Densité des valeurs de cos n

a) Si $G = a\mathbb{Z}$, alors $1 = pa$ et $2\pi = qa$, d'où $\pi = \frac{q}{2p} \in \mathbb{Q}$: absurde. Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non monogène est dense.

b) Pour $x \in [0, 2\pi]$ et $\varepsilon > 0$, il existe $m + 2\pi k \in G$ à distance $< \varepsilon$ de x, c'est-à-dire un entier m dont le représentant modulo 2π est proche de x.

c) Pour $c = \cos x \in [-1, 1]$, on extrait n_k avec $n_k \bmod 2\pi \to x$; par continuité et périodicité,

$$\cos n_k \to \cos x = c$$

— et les valeurs d'adhérence sont dans le fermé $[-1, 1]$.

Réponse. $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ dense ; $\mathrm{Adh}(\cos n) = [-1, 1]$.

Correction de l'exercice 13 – Convergence d'une suite de matrices par diagonalisation

a) $A = \frac{1}{4}(I + J)$: valeurs propres 1 (sur $(1,1,1)$) et $\frac{1}{4}$ (double).

b) $A^n = \frac{1}{3}J + \frac{1}{4^n}\left(I - \frac{1}{3}J\right) \to \frac{1}{3}J$.

c) $X_n \to \frac{1}{3}JX_0 = (1,1,1)$. La somme des coordonnées est conservée (A est bistochastique) :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \text{ pour tout } n$$

— et la suite tend vers l'état uniforme de même somme.

Réponse. $\mathrm{Sp}A = \{1, \frac{1}{4}\}$; $A^n \to \frac{1}{3}J$; $X_n \to (1,1,1)$.

Correction de l'exercice 14 – Unicité de la limite et équivalence des normes

a) Si $u_n \to \ell$ et $u_n \to \ell'$, alors $\|\ell - \ell'\| \leq \|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\| \to 0$.

b) $N_1(u_n - \ell) \leq CN_2(u_n - \ell) \to 0$.

c) $f_n(x) = x^n$ tend vers 0 pour $\|\cdot\|_1$, et ne converge pas pour $\|\cdot\|_\infty$: si elle convergeait vers g pour $\|\cdot\|_\infty$, elle convergerait aussi vers g pour $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$, donc $g = 0$; or

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

Réponse. Limite unique ; $N_1 \leq CN_2$ transporte la convergence ; x^n converge pour $\|\cdot\|_1$ seulement.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une suite vectorielle non linéaire

a) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, stochastique : valeur propre 1, et l'autre vaut $\mathrm{tr}A - 1 = \frac{1}{6}$.

b) Invariant : $2x_{n+1} + 3y_{n+1} = (x_n + y_n) + (x_n + 2y_n) = 2x_n + 3y_n$. La composante sur la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

valeur propre $\frac{1}{6}$ tend vers 0 et $X_n \to (\ell, \ell)$ (vecteur propre $(1,1)$), avec $5\ell = 2x_0 + 3y_0 = 2$:

$$\lim X_n = \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

c) $X_n - (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}) = \left(\frac{1}{6}\right)^n (X_0 - (\frac{2}{5}, \frac{2}{5}))$ (car $X_0 - \ell(1,1)$ est vecteur propre pour $\frac{1}{6}$: il est dans le noyau de l'invariant) ; erreur en 6^{-n}.

d) $x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{6}$: la différence garde le signe de $x_0 - y_0 = 1 > 0$. Donc $y_n \le x_n$, et $x_{n+1} - x_n = \frac{y_n - x_n}{2} \le 0$, $y_{n+1} - y_n = \frac{x_n - y_n}{3} \ge 0$: suites adjacentes.

Réponse. $\mathrm{Sp} A = \{1, \frac{1}{6}\}$; $X_n \to (\frac{2}{5}, \frac{2}{5})$ en 6^{-n} ; (x_n) décroît, (y_n) croît : adjacentes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).