Plaquette 4 – Complétude, suites de Cauchy et théorème du point fixe

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Un espace est **complet** si toute suite de Cauchy converge : c'est le cas des evn de dimension finie et de $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$, pas de $\mathbb{Q}$ ni de $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$. La complétude rend utilisables deux outils : la convergence des **séries absolument convergentes** (exponentielle de matrice, séries de Neumann) et le **théorème du point fixe** de Banach. Pour appliquer ce dernier, on vérifie trois points : un **fermé** (donc complet) **stable**, une application **contractante** (constante $k < 1$, souvent par l'inégalité des accroissements finis), puis on conclut à l'existence, l'unicité, et l'estimation de l'erreur.

Exercice 1 – Q n'est pas complet

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $u_n \in \mathbb{Q}$, $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$, et que (u_n) décroît à partir du rang 1.

b) En déduire que (u_n) converge dans $\mathbb{R}$ vers $\sqrt{2}$, et qu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

c) Conclure que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

Exercice 2 – Les fonctions continues ne sont pas complètes pour la norme 1

Dans $C([0,2])$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^2 |f|$, soit f_n nulle sur $[0,1]$, égale à $n(x-1)$ sur $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$ et à 1 ensuite.

a) Montrer que $\|f_n - f_p\|_1 \leq \frac{1}{\min(n,p)}$, donc que (f_n) est de Cauchy.

b) Montrer que si $f_n \to f$ dans $(C([0,2]), \|\cdot\|_1)$, alors $f = 0$ sur $[0,1]$ et $f = 1$ sur $]1,2]$.

c) Conclure.

Exercice 3 – L'espace des fonctions continues est complet pour la norme infinie

Soit (f_n) de Cauchy dans $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$.

a) Montrer que pour tout x, $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$; on note $f(x)$ sa limite.

b) Montrer que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ (passer à la limite en p dans $|f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon$).

c) Montrer que f est continue et conclure.

Exercice 4 – Séries absolument convergentes de matrices

Soit $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge pour toute A, et que $\|\exp(A)\| \leq e^{\|A\|}$.

b) Pour $\|A\| < 1$, montrer que $\sum_{k \geq 1} \frac{A^k}{k}$ converge.

c) Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et vérifier la majoration.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Résolution de x = cos x

a) Montrer que $\cos([0,1]) \subset [0,1]$ et que cos est k-lipschitzienne sur $[0,1]$ avec $k = \sin 1 < 1$.

b) En déduire que $x = \cos x$ a une unique solution $\ell \in [0,1]$, limite de $x_{n+1} = \cos x_n$.

c) Avec $x_0 = 0$, combien d'itérations garantissent une erreur $\leq 10^{-3}$? ($\sin 1 \approx 0{,}8415$)

Exercice 6 – Une équation intégrale de Fredholm

On cherche $f \in C([0,1])$ telle que $f(x) = 1 + \lambda \int_0^1 xtf(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $T : f \mapsto 1 + \lambda \int_0^1 xtf(t)\,\mathrm{d}t$ est $\frac{|\lambda|}{2}$-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$.

b) En déduire l'existence et l'unicité d'une solution pour $|\lambda| < 2$.

c) Résoudre explicitement (chercher $f = 1 + cx$) et préciser pour quels λ la solution existe.

Exercice 7 – Contraction sur une demi-droite

Soit $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $F = [0, +\infty[$.

a) Montrer que $f(F) \subset F$ et que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur F.

b) En déduire que $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ converge pour tout $u_0 \geq 0$, et déterminer la limite.

c) Interpréter la limite comme valeur de $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$.

Exercice 8 – Hypothèses nécessaires du point fixe

a) Montrer que $f(x) = \frac{x}{2}$ est contractante sur $]0,1]$ sans point fixe. Quelle hypothèse manque ?

b) Montrer que $g(x) = x + \frac{1}{x}$ vérifie $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$ dans $[1, +\infty[$, sans avoir de point fixe. Quelle hypothèse manque ?

c) Montrer en revanche que si K est compact et $|h(x) - h(y)| < |x - y|$ pour $x \neq y$, alors h a un unique point fixe (minimiser $x \mapsto |h(x) - x|$).

Exercice 9 – Itérée contractante

Soit $f : F \to F$ (F fermé d'un espace complet) telle que $f^p = f \circ \cdots \circ f$ soit contractante pour un $p \geq 1$.

a) Montrer que f^p a un unique point fixe ℓ.

b) Montrer que $f(\ell)$ est aussi point fixe de f^p, et en déduire que $f(\ell) = \ell$.

c) Application : $f(x) = \cos x$ sur $\mathbb{R}$ n'est pas contractante ; montrer que $f \circ f$ l'est (on admettra $|\sin(\cos x)\sin x| \leq \sin 1 < 1$).

Exercice 10 – Itérations de Picard

On résout $y' = y$, $y(0) = 1$ sur $[0,a]$ en cherchant un point fixe de $\Phi(y)(x) = 1 + \int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer $\Phi^n(0)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer par récurrence que $|\Phi^n(y)(x) - \Phi^n(z)(x)| \leq \frac{x^n}{n!}\|y - z\|_\infty$.

c) En déduire que Φ^n est contractante pour n grand, et conclure.

Exercice 11 – Suites de Cauchy : propriétés

Soit (u_n) une suite de Cauchy d'un evn.

a) Montrer que (u_n) est bornée.

b) Montrer que si une sous-suite converge vers ℓ, alors $u_n \to \ell$.

c) En déduire, avec Bolzano-Weierstrass, que $\mathbb{R}^d$ est complet.

Exercice 12 – Un fermé d'un complet est complet

a) Montrer qu'un fermé F d'un espace complet E est complet.

b) Montrer réciproquement qu'une partie complète d'un evn est fermée.

c) Application : montrer que $O(n)$ et S_n^+ sont complets, et que $GL_n(\mathbb{R})$ ne l'est pas.

Exercice 13 – Logarithme matriciel par série

Soit N une matrice avec $\|N\| < 1$ (norme sous-multiplicative) et $L = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} N^k$.

a) Justifier la convergence de la série.

b) Calculer L lorsque $N = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $\exp(L)$.

c) Même question pour $N = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 14 – Suite définie par une série vectorielle

Soit (v_k) une suite de $\mathbb{R}^2$ avec $\|v_k\| \leq \frac{1}{k^2}$, et $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Montrer que (S_n) est de Cauchy et majorer $\|S_p - S_n\|$ pour $p > n$.

b) En déduire la convergence et majorer le reste $\|S - S_n\|$.

c) Application : $v_k = \frac{1}{k^2}(\cos k, \sin k)$. Combien de termes pour une erreur $\leq 10^{-2}$?

Exercice 15 – Synthèse : une équation fonctionnelle par point fixe

On cherche $f \in C([0,1])$ telle que $f(x) = x + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ pour tout x.

a) Montrer que $T(f)(x) = x + \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$ définit une application de $C([0,1])$ dans lui-même, $\frac{1}{2}$-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$.

b) En déduire l'existence et l'unicité de la solution.

c) Calculer $T^n(0)$ et en déduire la solution explicite.

d) Vérifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).