Plaquette 5 – Continuité uniforme, lipschitzianité et équations fonctionnelles

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La **continuité uniforme** demande un même δ pour tous les points : pour l'établir, on utilise une propriété lipschitzienne ou höldérienne, ou le **théorème de Heine** (continuité sur un compact). Pour la nier, on exhibe deux suites x_n, y_n avec $|x_n - y_n| \to 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$. Dans les **équations fonctionnelles**, la continuité permet de passer d'une identité vraie sur une partie **dense** (rationnels, dyadiques, multiples d'une période) à tout l'espace, ou de faire tendre un argument itéré vers un point où l'on connaît la valeur.

Exercice 1 – Le carré n'est pas uniformément continu sur R

a) Avec $x_n = n + \frac{1}{n}$ et $y_n = n$, montrer que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'elle est uniformément continue sur tout segment $[-A, A]$, et donner un δ explicite pour ε donné.

c) Montrer que sin est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – La racine carrée : uniformément continue mais pas lipschitzienne

a) Montrer que $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour $x, y \geq 0$.

b) En déduire que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer qu'elle n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$.

Exercice 3 – Le théorème de Heine

Soit f continue sur un compact K d'un evn. On suppose f non uniformément continue.

a) Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ et de suites (x_n), (y_n) avec $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

b) Extraire une sous-suite convergente de (x_n) et obtenir une contradiction.

c) Application : $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$ (prolongée par 0) est uniformément continue sur $[0, 1]$.

Exercice 4 – Prolongement par continuité uniforme

Soit f uniformément continue sur $]0, 1]$.

a) Montrer que pour toute suite $x_n \to 0$, $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc converge.

b) Montrer que la limite ne dépend pas de la suite, et en déduire que f se prolonge par continuité en 0.

c) En déduire que $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – L'équation de Cauchy

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ pour tous x, y. On pose $a=f(1)$.

a) Montrer que $f(0)=0$, $f(-x)=-f(x)$ et $f(nx)=nf(x)$ pour $n\in\mathbb{Z}$.

b) En déduire $f(r)=ar$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$.

c) Conclure par densité que $f(x)=ax$ pour tout réel x.

Exercice 6 – L'équation fonctionnelle du logarithme

Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(xy)=f(x)+f(y)$.

a) Montrer que $g(t)=f(\mathrm{e}^t)$ vérifie l'équation de Cauchy.

b) En déduire que $f(x)=a\ln x$.

c) Déterminer de même les $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ continues avec $h(x+y)=h(x)h(y)$.

Exercice 7 – Fonctions invariantes par une homothétie

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(2x)=f(x)$ pour tout x.

a) Montrer que $f(x)=f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

b) En déduire que f est constante.

c) La conclusion subsiste-t-elle si f n'est continue qu'en dehors de 0 ? (Considérer $f(x)=\sin(2\pi\log_2|x|)$.)

Exercice 8 – Fonctions à deux périodes incommensurables

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique.

a) Montrer que tout élément de $G=\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ est une période.

b) En déduire que f est constante.

c) Donner une fonction non constante (non continue) admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes.

Exercice 9 – Fonctions périodiques continues

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et T-périodique ($T>0$).

a) Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

b) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

c) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ ayant des limites finies en $\pm\infty$ est-elle uniformément continue ?

Exercice 10 – Une équation fonctionnelle résolue par itération

On cherche les $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 telles que $f(x)+f(2x)=3x$.

a) Vérifier que $f(x)=x$ convient.

b) Montrer que $g=f-\mathrm{id}$ vérifie $g(2x)=-g(x)$, puis $|g(x)|=\left|g\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|$.

c) En déduire que $f(x)=x$ est l'unique solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Fonctions höldériennes

On dit que f est α-höldérienne ($0 < \alpha \leq 1$) s'il existe C avec $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$.

a) Montrer qu'une fonction höldérienne est uniformément continue.

b) Montrer qu'une fonction α-höldérienne sur $\mathbb{R}$ avec $\alpha > 1$ est constante.

c) Montrer que $x \mapsto x^{1/3}$ est $\frac{1}{3}$-höldérienne sur $\mathbb{R}_+$ (admettre $|a^{1/3} - b^{1/3}| \leq |a - b|^{1/3}$).

Exercice 12 – Fonction lipschitzienne sur une partie dense

Soit $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne.

a) Montrer que f se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\widetilde{f}$ est k-lipschitzienne.

c) Application : $f(r) = |r - \sqrt{2}|$ sur $\mathbb{Q}$; décrire $\widetilde{f}$.

Exercice 13 – Limite uniforme et continuité uniforme

Soit (f_n) une suite de fonctions uniformément continues sur $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers f.

a) Montrer que f est uniformément continue (argument en $\frac{\varepsilon}{3}$).

b) Montrer que le résultat est faux pour une convergence seulement simple (exemple : $f_n(x) = \min(x^2, n)$).

c) Application : $\sum_{k \geq 1} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 – Point fixe et fonction croissante

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue.

a) Montrer que f a un point fixe (étudier $x \mapsto f(x) - x$).

b) Si de plus f est croissante (pas forcément continue), montrer encore l'existence d'un point fixe avec $c = \sup\{x \mid f(x) \geq x\}$.

c) Le point fixe est-il unique en général ? Donner un exemple.

Exercice 15 – Synthèse : une équation fonctionnelle avec densité

On cherche les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ pour tous x, y (équation de Jensen).

a) Montrer que $g(x) = f(x) - f(0)$ vérifie la même équation et $g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{2}$.

b) En déduire que g est additive : $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

c) Conclure que f est affine.

d) Montrer que la continuité en un seul point suffirait (admettre qu'une fonction additive continue en un point est continue partout).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).