Plaquette 3 – Limites et continuité des fonctions de plusieurs variables

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour étudier la limite de $f(x,y)$ en $(0,0)$: **(1)** tester des chemins (droites $y=mx$, paraboles $y=x^2$, $x=y^2$) ; si deux chemins donnent des limites différentes, il n'y a **pas** de limite. **(2)** Pour **prouver** une limite ℓ, majorer $|f(x,y)-\ell|$ par une quantité qui tend vers 0 avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$ (coordonnées polaires, inégalités $|x|\leq r$, $|xy|\leq \frac{r^2}{2}$). Attention : des limites égales sur **toutes les droites** ne garantissent pas l'existence de la limite. La continuité sur un ouvert s'obtient par opérations sur les fonctions continues ; seuls les points « à problème » demandent une étude.

Exercice 1 – Majoration en coordonnées polaires

Soit $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Montrer que $|f(x,y)|\leq|x|$.

b) En déduire que f se prolonge par continuité en $(0,0)$.

c) Écrire f en coordonnées polaires et retrouver le résultat.

Exercice 2 – Absence de limite

Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

a) Calculer la limite de f le long des axes.

b) Calculer la limite le long de la droite $y=mx$.

c) Conclure. f est-elle bornée au voisinage de 0 ?

Exercice 3 – Continuité séparée sans continuité

Soit $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ et $f(0,0)=0$.

a) Montrer que pour tout y_0, $x\mapsto f(x,y_0)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et de même en y.

b) Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

c) f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$?

Exercice 4 – Limites sur les droites trompeuses

Soit $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Calculer la limite de f le long de toute droite passant par l'origine.

b) Calculer $f(y^2,y)$.

c) Conclure.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une famille de quotients

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ et $f_{a,b}(x,y) = \dfrac{x^a y^b}{x^2+y^2}$.

a) Écrire $f_{a,b}$ en polaires.

b) Montrer que $f_{a,b} \to 0$ en $(0,0)$ si $a+b>2$.

c) Montrer que si $a+b \le 2$, il n'y a pas de limite nulle (étudier le cas $a+b=2$ puis $a+b<2$).

Exercice 6 – Prolongement d'un quotient exponentiel

Soit $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{xy}-1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0,y) = y$.

a) Montrer que $f(x,y) = y\,\varphi(xy)$ avec $\varphi(u) = \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$ ($\varphi(0)=1$).

b) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 – Limite à l'infini

Soit $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$.

a) Montrer que $f(x,y) \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$.

b) En déduire que f est bornée et atteint ses bornes.

c) Déterminer le maximum de f (étudier f sur la droite $y=x$, puis justifier).

Exercice 8 – Limite d'un sinus cardinal

Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

a) Montrer que $f(x,y) \to 1$ en $(0,0)$.

b) Montrer que f prolongée par $f(0,0)=1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les zéros de f et l'ensemble $\{f = 0\}$.

Exercice 9 – Prolongement d'un quotient par la norme

Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

a) Montrer que $|f(x,y)| \le \dfrac{r}{2}$.

b) En déduire le prolongement par continuité en $(0,0)$.

c) Montrer que f est 1-lipschitzienne le long de chaque rayon issu de l'origine ($t \mapsto f(t\cos\theta, t\sin\theta)$).

Exercice 10 – Image réciproque et ouverts du plan

a) Montrer que $U = \{(x,y) \mid x^2+y^2<1,\ x>0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que $F = \{(x,y) \mid \sin(xy) = 0\}$ est fermé et le décrire.

c) Montrer que $V = \{(x,y) \mid |x|+|y|<1,\ y \neq x\}$ est ouvert.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Composition et continuité

a) Montrer que $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer le domaine de définition de $g(x,y) = \sqrt{xy - 1}$ et montrer que g y est continue.

c) Montrer que $h(x,y) = \max(x,y) = \dfrac{x + y + |x - y|}{2}$ est continue et 1-lipschitzienne pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 12 – Fonction homogène de degré zéro

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par $f(x,y) = g\left(\dfrac{(x,y)}{\|(x,y)\|_2}\right)$ avec g continue sur le cercle unité.

a) Montrer que $f(tx, ty) = f(x,y)$ pour $t > 0$.

b) Montrer que f a une limite en 0 si et seulement si g est constante.

c) Exemple : $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ est de cette forme ; préciser g.

Exercice 13 – Continuité des valeurs propres en taille 2

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres réelles, soit $\lambda_\pm(M) = \dfrac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$.

a) Montrer que $\lambda_\pm$ sont continues sur $\Omega = \{(a-d)^2 + 4bc \geq 0\}$.

b) Montrer que λ_+ n'est pas lipschitzienne au voisinage de I_2 (considérer $M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$).

c) Interpréter.

Exercice 14 – Fonction continue sur un fermé borné

Soit $K = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x,y) = x^2 - y + xy$.

a) Justifier que f est bornée sur K et atteint ses bornes.

b) Montrer que le minimum est atteint sur le bord (étudier les points critiques intérieurs).

c) Donner un encadrement simple de f sur K.

Exercice 15 – Synthèse : étude complète d'une fonction de deux variables

Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer $f(x, mx)$ et la limite de $\dfrac{f(t, mt)}{t}$ quand $t \to 0$.

c) Montrer que $|f(x,y)| \leq \max(|x|, |y|)$.

d) Étudier le signe de f et décrire l'ensemble $\{f = 0\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).