# Plaquette 1 – Suites d'un evn, continuité, complétude et points fixes

## Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

**Méthode**

On étudie la convergence dans un espace normé, on caractérise fermés et continuité par les **suites**, on utilise la **complétude** et le **théorème du point fixe** de Banach.

### Exercice 1 – Convergence coordonnée par coordonnée

Dans $\mathbb{R}^2$, étudier la convergence de $u_n = \left(\frac{n}{n+1}, \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

### Exercice 2 – Fermé par les suites

Montrer que $S_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques, est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.

### Exercice 3 – Suite de Cauchy

Montrer que la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et conclure.

### Exercice 4 – Espace non complet

Montrer que $C([0\,;1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet.

### Exercice 5 – Continuité et suites

Soit $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. $f$ est-elle continue en l'origine ?

### Exercice 6 – Point fixe de Banach

Soit $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ sur $X = [1\,;2]$.

a) Montrer que $f(X) \subset X$ et que $f$ est contractante.

b) En déduire la convergence de $u_{n+1} = f(u_n)$ et sa limite.

### Exercice 7 – Théorème des bornes

Soit $f$ continue sur le disque fermé $D = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ avec $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Déterminer son maximum et son minimum.

### Exercice 8 – Image continue d'un compact

Soit $K$ compact non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to \mathbb{R}$ continue et **strictement positive**. Montrer qu'il existe $m > 0$ avec $f \geq m$ sur $K$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 9 – Équivalence des normes

Esquisser la démonstration du fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.

### Exercice 10 – Suite matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^k \to 0$.

### Exercice 11 – Uniforme continuité

La fonction $f(x) = x^2$ est-elle uniformément continue sur $[0\,;1]$ ? Sur $\mathbb{R}$ ?

### Exercice 12 – Valeurs d'adhérence d'une suite du plan

Soit $u_n = \left(\cos\frac{n\pi}{2}, \frac{1}{n+1}\right) \in \mathbb{R}^2$.

a) Calculer $u_{4k}$, $u_{4k+1}$, $u_{4k+2}$, $u_{4k+3}$ et leurs limites quand $k \to +\infty$.

b) En déduire les valeurs d'adhérence de $(u_n)$. La suite converge-t-elle ?

c) Montrer qu'une suite bornée de $\mathbb{R}^2$ qui n'a qu'une valeur d'adhérence converge.

### Exercice 13 – Limites en l'origine

Étudier l'existence d'une limite en $(0,0)$ de :

a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

b) $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$.

c) $h(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ (tester les droites puis la parabole $y = x^2$).

### Exercice 14 – Prolongement par continuité

Soit $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{y}$ pour $y \neq 0$.

a) Montrer que $|\sin u - u| \leq \dfrac{|u|^3}{6}$ pour tout réel $u$ (admis), et en déduire $|f(x,y) - x| \leq \dfrac{|x|^3 y^2}{6}$.

b) Montrer que $f$ se prolonge par continuité à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(x,0) = x$.

c) Le prolongement est-il continu en tout point $(x_0, 0)$ ?

### Exercice 15 – Synthèse : méthode de Newton

On cherche la racine de $g(x) = x^3 - 2$ par $u_{n+1} = u_n - \dfrac{g(u_n)}{g'(u_n)}$, avec $u_0 = 1{,}5$.

a) Écrire la relation de récurrence simplifiée.

b) Calculer $u_1$, $u_2$ et commenter la vitesse de convergence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).