Plaquette 2 – Suites dans un evn : convergence, valeurs d'adhérence, récurrences

Suites, limites, continuité — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

En dimension finie, la convergence se lit **coordonnée par coordonnée** et ne dépend pas de la norme. Pour une suite matricielle ou vectorielle définie par récurrence linéaire, on **réduit** la matrice ; pour une récurrence non linéaire, on cherche une **contraction** (point fixe) ou une **monotonie** (suites adjacentes). Les **valeurs d'adhérence** sont les limites des sous-suites ; pour montrer qu'une suite diverge, il suffit d'en trouver deux. Une suite bornée de $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si elle a une seule valeur d'adhérence.

Exercice 1 – Convergence coordonnée par coordonnée

Soit $u_n = \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\, n\sin\frac{1}{n},\, \frac{\ln n}{n}\right) \in \mathbb{R}^3$.

a) Déterminer la limite de chaque coordonnée.

b) En déduire la limite de (u_n) pour n'importe quelle norme de $\mathbb{R}^3$.

c) Donner un équivalent de $\|u_n - \ell\|_\infty$.

Exercice 2 – Une limite matricielle

Soit $M_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$.

a) Montrer que $\varphi : a+ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{C}$ dans $M_2(\mathbb{R})$, continu.

b) Écrire $M_n = \varphi\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)^n\right)$.

c) En déduire $\lim M_n$.

Exercice 3 – Point fixe d'une contraction du plan

Soit $f(x,y) = \left(\frac{\cos y}{2}, \frac{\sin x}{2}\right)$ sur $\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

a) Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

b) En déduire que la suite $p_{n+1} = f(p_n)$ converge vers un unique point fixe, pour tout p_0.

c) Avec $p_0 = (0,0)$, majorer $\|p_n - \ell\|_\infty$ et donner une valeur approchée de ℓ.

Exercice 4 – Une récurrence linéaire d'ordre 2

Soit $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2}$, avec u_0, u_1 donnés.

a) Écrire $X_{n+1} = AX_n$ avec $X_n = (u_n, u_{n+1})$ et calculer le spectre de A.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que $u_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Déterminer la limite en fonction de u_0, u_1, et retrouver ce résultat par l'invariant $u_n + 2u_{n+1}$.

Exercice 5 – Puissances d'une rotation

Soit $R = R_\theta$ la rotation d'angle θ du plan, avec $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$.

a) Montrer que (R^n) est bornée mais ne converge pas.

b) On admet que $\{n\theta \bmod 2\pi\}$ est dense dans $[0, 2\pi]$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (R^n) est $SO(2)$ tout entier.

c) Que se passe-t-il si $\theta = \frac{2\pi}{3}$?

Exercice 6 – Moyenne arithmético-géométrique

Soit $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

a) Montrer que $b_n \le b_{n+1} \le a_{n+1} \le a_n$.

b) Montrer que $a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{a_n - b_n}{2}$, et en déduire que les deux suites convergent vers une même limite M.

c) Calculer a_1, b_1, a_2, b_2 et donner un encadrement de M.

Exercice 7 – Valeurs d'adhérence d'une suite réelle

Déterminer les valeurs d'adhérence des suites suivantes.

a) $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

b) $v_n = \cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{(-1)^n}{n}$.

c) $w_n = n\left(1 - (-1)^n\right)$. Cette suite a-t-elle une valeur d'adhérence ? Converge-t-elle ?

Exercice 8 – Moyennes de Cesàro dans un evn

Soit (u_n) une suite d'un evn E et $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que si $u_n \to \ell$, alors $c_n \to \ell$.

b) Montrer que la réciproque est fausse avec $u_n = (-1)^n$ dans $\mathbb{R}$.

c) Application : si $u_{n+1} - u_n \to a$ dans $\mathbb{R}^d$, montrer que $\frac{u_n}{n} \to a$.

Exercice 9 – Suites de fonctions dans l'espace des fonctions continues

Dans $C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$:

a) Montrer que $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ tend vers 0.

b) Étudier $g_n(x) = x^n(1-x)$ (calculer $\|g_n\|_\infty$).

c) La suite $h_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ converge-t-elle pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Suite récurrente et intervalle stable

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$.

a) Montrer que $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est stable par $f(x) = \frac{1}{1+x}$ et que f y est $\frac{4}{9}$-lipschitzienne.

b) En déduire que (u_n) converge vers l'unique point fixe de f dans I, que l'on calculera.

c) Majorer $|u_n - \ell|$.

Exercice 11 – Une suite de Cauchy dans un evn

Soit (u_n) une suite d'un evn telle que $\|u_{n+1} - u_n\| \leq \frac{1}{2^n}$.

a) Montrer que (u_n) est de Cauchy.

b) En déduire qu'elle converge si l'espace est complet (par exemple de dimension finie).

c) La condition $\|u_{n+1} - u_n\| \to 0$ suffit-elle ? (Étudier $u_n = \sqrt{n}$ dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 12 – Densité des valeurs de cos n

a) Montrer que $G = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$ (π est irrationnel).

b) En déduire que $\{n \bmod 2\pi \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 2\pi]$ (on admettra le passage de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{N}$).

c) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\cos n)$ est $[-1, 1]$.

Exercice 13 – Convergence d'une suite de matrices par diagonalisation

Soit $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $X_{n+1} = AX_n$.

a) Déterminer le spectre de A.

b) En déduire la limite de A^n.

c) Calculer $\lim X_n$ pour $X_0 = (3, 0, 0)$ et interpréter (moyenne conservée).

Exercice 14 – Unicité de la limite et équivalence des normes

a) Montrer qu'une suite d'un evn a au plus une limite.

b) Montrer que si $N_1 \leq CN_2$, toute suite convergente pour N_2 converge pour N_1 vers la même limite.

c) Dans $C([0, 1])$, trouver une suite convergente pour $\|\cdot\|_1$ et divergente pour $\|\cdot\|_\infty$, et expliquer pourquoi elle ne peut pas avoir deux limites différentes.

Exercice 15 – Synthèse : une suite vectorielle non linéaire

Soit (x_n, y_n) définie par $(x_0, y_0) = (1, 0)$ et $x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$, $y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}$.

a) Écrire $X_{n+1} = AX_n$ et déterminer le spectre de A.

b) Montrer que (X_n) converge et déterminer la limite (chercher un invariant linéaire $\alpha x + \beta y$).

c) Majorer la vitesse de convergence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Les deux suites (x_n) et (y_n) sont-elles adjacentes ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).