Plaquette 5 – Applications : décomposition polaire, valeurs singulières, optimisation

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Valeurs singulières.

— $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n \geq 0$: racines des valeurs propres de $A^{\mathsf{T}}A$; $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sigma_1$, $|\det A| = \prod \sigma_i$.

— **Décomposition polaire** (A inversible) : $A = OS$, $O \in O(n)$, $S = \sqrt{A^{\mathsf{T}}A} \in S_n^{++}$, unique.

— **SVD** : $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$ avec U, V orthogonales, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_i)$; on a $AV = U\Sigma$, et

$$Av_i = \sigma_i u_i, \qquad A^{\mathsf{T}}u_i = \sigma_i v_i$$

Optimisation quadratique. Pour $S \in S_n^{++}$ et $J(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}Sx - b^{\mathsf{T}}x$:

— minimum unique en $x^* = S^{-1}b$;

— descente de gradient $x_{k+1} = x_k - t\nabla J(x_k)$: convergence si et seulement si $0 < t < \frac{2}{\lambda_{\max}}$, vitesse optimale $\frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$.

Correction de l'exercice 1 – Décomposition polaire d'une matrice symétrique

a) Valeurs propres 3 et -1, projecteurs $p_+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ et $p_- = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. $A^2 = 9p_+ + p_-$, donc

$$S = 3p_+ + p_- = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

b) $S^{-1} = \frac{1}{3}p_+ + p_-$ et $O = AS^{-1} = p_+ - p_- = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, orthogonale (réflexion d'axe $y = x$).

Vérification : $OS = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = A$ ✓.

c) $S = |A|$ remplace chaque valeur propre par sa valeur absolue, O par son signe : $A = (p_+ - p_-)(3p_+ + p_-)$.

Réponse. $S = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; O = signe, S = valeur absolue de A.

Correction de l'exercice 2 – Existence et unicité de la décomposition polaire

a) $x^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}Ax = \|Ax\|^2 > 0$ pour $x \neq 0$ (A inversible).

b) $O^{\mathsf{T}}O = S^{-1}A^{\mathsf{T}}AS^{-1} = S^{-1}S^2S^{-1} = I$ (S symétrique).

c) $A^{\mathsf{T}}A = S'O'^{\mathsf{T}}O'S' = S'^2$. Par unicité de la racine carrée positive :

$$S' = \sqrt{A^{\mathsf{T}}A} = S, \qquad O' = AS^{-1} = O$$

Réponse. $S = \sqrt{A^{\mathsf{T}}A}$, $O = AS^{-1} \in O(n)$, unicité par unicité de la racine carrée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Valeurs singulières et norme

a) $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 1$.

b) $\|A\| = 2$. Les valeurs propres de A vérifient $\lambda^2 = -2$, donc $\rho(A) = \sqrt{2} < 2$: pour une matrice non normale, rayon spectral et norme diffèrent.

c) $S = \mathrm{diag}(1, 2)$ et $O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A = R_{\pi/2}\mathrm{diag}(1, 2)$$

— on étire d'un facteur 2 selon e_2, puis on tourne d'un quart de tour.

Réponse. $\sigma = (2, 1)$; $\|A\| = 2 > \rho(A) = \sqrt{2}$; $A = R_{\pi/2}\mathrm{diag}(1, 2)$.

Correction de l'exercice 4 – Décomposition en valeurs singulières d'une matrice de rang 1

a) $A^{\mathsf{T}}A = v(u^{\mathsf{T}}u)v^{\mathsf{T}} = \|u\|^2 vv^{\mathsf{T}}$, de valeurs propres $\|u\|^2\|v\|^2$ et 0 : une seule valeur singulière non nulle $\sigma_1 = \|u\|\|v\|$.

b) Avec $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ et $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^{\mathsf{T}}$$

— complétées en bases orthonormées U, V quelconques.

c) $A = (1, 2, 2)^{\mathsf{T}}(1, 2)$, $\|u\| = 3$, $\|v\| = \sqrt{5}$: $\sigma_1 = 3\sqrt{5}$, et $\|A\|_F^2 = 1 + 4 + 4 + 16 + 4 + 16 = 45 = \sigma_1^2$ ✓.

Réponse. $\sigma_1 = \|u\|\|v\|$, les autres nulles ; ici $3\sqrt{5}$.

Correction de l'exercice 5 – Solution de norme minimale

a) $x_0 = (3, 0, 0)$ est solution ; les solutions sont $x_0 + \ker A$.

b) La solution de norme minimale est le projeté orthogonal de 0 sur ce plan affine, c'est-à-dire $x_0 - p_{\ker A}(x_0)$, orthogonal à $\ker A$. Or $(\ker A)^{\perp} = \mathrm{Im}A^{\mathsf{T}} = \mathbb{R}(1, 1, 1)$, d'où $x^* = (t, t, t)$ avec $3t = 3$:

$$x^* = (1, 1, 1), \qquad \|x^*\| = \sqrt{3}$$

c) $AA^{\mathsf{T}} = 3$, donc $A^{\mathsf{T}}(AA^{\mathsf{T}})^{-1}b = \frac{1}{3}(1, 1, 1)^{\mathsf{T}} \times 3 = (1, 1, 1)$ ✓.

Réponse. $x^* = (1, 1, 1) \in \mathrm{Im}A^{\mathsf{T}}$; $x^* = A^{\mathsf{T}}(AA^{\mathsf{T}})^{-1}b$.

Correction de l'exercice 6 – Tenseur d'inertie et axes principaux

a) $\|r_k\|^2 = 2$ et $r_k r_k^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour les deux, d'où

$$I = 2\left(2I_3 - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $I(1, 1, 0) = 0$, $I(1, -1, 0) = (4, -4, 0)$, $Ie_3 = 4e_3$: moments 0, 4, 4, axes $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 0)$, e_3.

c) Les masses sont sur la droite $\mathbb{R}(1, 1, 0)$: en tournant autour de cette droite, elles ne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

bougent pas, d'où un moment d'inertie nul. Autour de tout axe perpendiculaire passant par l'origine, le moment vaut $2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$.

Réponse. $I = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; moments 0, 4, 4.

Correction de l'exercice 7 – Variance minimale d'une combinaison

a) $V(a^{\mathsf{T}}X) = \mathrm{Cov}\left(\sum a_i X_i, \sum a_j X_j\right) = \sum_{i,j} a_i a_j c_{ij}$.

b) Rayleigh : minimum $\lambda_{\min} = 1$, atteint en $a = \pm \dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$.

c) Par symétrie, on cherche $a = \left(\frac{1}{2} + s, \frac{1}{2} - s\right)$:
$a^{\mathsf{T}}Ca = 2\left(\frac{1}{2}+s\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}-s\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4} - s^2\right) = \frac{3}{2} + 2s^2$, minimal pour $s = 0$:

$$a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad V_{\min} = \frac{3}{2}$$

Réponse. $\min_{\|a\|=1} V = 1$ en $\dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$; sous $a_1 + a_2 = 1$: $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $V = \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Convexité d'une fonction quadratique

a) Développement direct par bilinéarité et symétrie.

b) f convexe $\Leftrightarrow t(1-t)f(x-y) \geq 0$ pour tous x, y et $t \in [0,1] \Leftrightarrow f \geq 0 \Leftrightarrow S \in S_n^+$. Strictement convexe $\Leftrightarrow f(h) > 0$ pour $h \neq 0$.

c) Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, valeurs propres 3 et -1 : f n'est pas convexe. Par exemple sur le segment $[(1,-1),(-1,1)]$, le milieu $(0,0)$ donne

$$f(0,0) = 0 > -2 = \frac{f(1,-1) + f(-1,1)}{2}$$

Réponse. f convexe $\Leftrightarrow S \geq 0$; $x^2 + 4xy + y^2$ n'est pas convexe.

Correction de l'exercice 9 – Descente de gradient

a) $Sx^* = b$, donc $x_{k+1} - x^* = x_k - x^* - tS(x_k - x^*)$.

b) $I - tS = \mathrm{diag}(1-t, 1-3t)$: convergence pour tout e_0 si et seulement si $|1-t| < 1$ et $|1-3t| < 1$, soit $0 < t < \frac{2}{3} = \frac{2}{\lambda_{\max}}$.

c) On minimise $\max(|1-t|, |1-3t|)$: l'optimum est atteint quand $1 - t = 3t - 1$, soit $t = \frac{1}{2}$, pour un facteur de contraction

$$\frac{1}{2} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} + \lambda_{\min}}$$

Réponse. $e_{k+1} = (I - tS)e_k$; convergence ssi $0 < t < \frac{2}{3}$; pas optimal $\frac{1}{2}$, facteur $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Laplacien d'un graphe

a) Développement direct. $x^{\mathsf{T}}Lx = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3$: $\ker L = \mathbb{R}(1,1,1)$ (graphe connexe).

b) $L(1,0,-1) = (1,0,-1)$ et $L(1,-2,1) = (3,-6,3)$: spectre

$$\{0, 1, 3\}$$

— (contrôle : trace $4 = 0 + 1 + 3$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\lambda_2 = 1 > 0$ traduit la connexité : $\lambda_2 = \min\{x^\top L x \mid \|x\| = 1, x \perp (1,1,1)\}$ mesure à quel point il est coûteux de « séparer » le graphe ; elle est nulle si et seulement si le graphe n'est pas connexe.

Réponse. $x^\top L x = \sum_{\text{arêtes}} (x_i - x_j)^2$; $\mathrm{Sp} L = \{0,1,3\}$, $\ker L = \mathbb{R}(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 11 – Exponentielle et logarithme des définies positives

a) $S = \sum \lambda_i p_i$ (projecteurs spectraux orthogonaux), donc $\exp(S) = \sum \mathrm{e}^{\lambda_i} p_i$, symétrique de valeurs propres $\mathrm{e}^{\lambda_i} > 0$.

b) Pour $T = \sum \mu_i p_i \in S_n^{++}$, $\log T = \sum \ln(\mu_i) p_i$ vérifie $\exp(\log T) = T$. Unicité : si $\exp(S) = T$, les sous-espaces propres de S sont ceux de T (car $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est injective), avec $\lambda_i = \ln \mu_i$.

c) Valeurs propres 9 et 1, projecteurs $p_9 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, p_1 :

$$\log T = \ln 9 \cdot p_9 = \ln 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse. $\exp : S_n \to S_n^{++}$ bijective ; $\log \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \ln 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Meilleure approximation de rang 1

a) $A - A_1 = \sigma_2 u_2 v_2^\top$, et $\|u_2 v_2^\top\|_F = \|u_2\| \|v_2\| = 1$.

b) $\|\sigma_2 u_2 v_2^\top x\| = \sigma_2 |\langle v_2, x \rangle| \le \sigma_2 \|x\|$, avec égalité pour $x = v_2$.

c) $\sigma_1 = 3$, $u_1 = v_1 = e_1$: $A_1 = \mathrm{diag}(3,0)$, à distance

$$\|A - A_1\| = 1 = \sigma_2$$

— (le théorème d'Eckart-Young affirme que c'est la distance minimale de A aux matrices de rang ≤ 1).

Réponse. $A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^\top$, erreur σ_2 ; ici $\mathrm{diag}(3,0)$, erreur 1.

Correction de l'exercice 13 – Conditionnement

a) $\|A\| = \sigma_1$ et les valeurs singulières de A^{-1} sont les $\frac{1}{\sigma_i}$, donc $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_n}$.

b) $\delta x = A^{-1} \delta b$ donne $\|\delta x\| \le \|A^{-1}\| \|\delta b\|$, et $\|b\| \le \|A\| \|x\|$. En divisant :

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

c) A est symétrique positive : $\sigma_i = \lambda_i$, et $\kappa(A) \approx \frac{2{,}005}{0{,}004988} \approx 402$. Une erreur relative de 0,1 % sur b peut produire une erreur d'environ 40 % sur x : matrice mal conditionnée.

Réponse. $\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$; amplification des erreurs relatives par κ ; ici $\kappa \approx 402$.

Correction de l'exercice 14 – Inégalité de Kantorovich en dimension 2

a) Calcul direct avec $S^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{M}\right)$.

b) En développant avec $x_2^2 = 1 - s$:
$s^2 + (1-s)^2 + s(1-s)\left(\frac{m}{M} + \frac{M}{m}\right) = 1 + s(1-s)\left(\frac{m}{M} + \frac{M}{m} - 2\right)$, et $\frac{m}{M} + \frac{M}{m} - 2 = \frac{(M-m)^2}{mM}$.

c) $s(1-s) \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$1 \le (x^{\mathsf{T}}Sx)(x^{\mathsf{T}}S^{-1}x) \le 1 + \frac{(M-m)^2}{4mM} = \frac{(M+m)^2}{4mM}$$

— (la minoration est aussi Cauchy-Schwarz : $1 = \langle S^{1/2}x, S^{-1/2}x\rangle^2$).

Réponse. $1 \le (x^{\mathsf{T}}Sx)(x^{\mathsf{T}}S^{-1}x) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : SVD et décomposition polaire

a) $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, valeurs propres 8 et 2, vecteurs $v_1 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$, $v_2 = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$; $\sigma_1 = 2\sqrt{2}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$.

b) $Av_1 = \frac{(0,4)}{\sqrt{2}}$, d’où $u_1 = (0,1)$; $Av_2 = \frac{(2,0)}{\sqrt{2}}$, d’où $u_2 = (1,0)$. Donc $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \operatorname{diag}(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $O = UV^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (rotation d’angle $\frac{\pi}{4}$) et $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vérification :

$$OS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3-1 & 1-3 \\ 3+1 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A$$

d) $\det A = 2 + 2 = 4 = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ ✓ et $\|A\| = 2\sqrt{2}$.

Réponse. $\sigma = (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $O = R_{\pi/4}$, $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\|A\| = 2\sqrt{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).