Plaquette 1 – Diagonalisation orthogonale, formes quadratiques et matrices positives

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème spectral. Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ (matrice symétrique réelle), alors :

— toutes les valeurs propres de A sont **réelles** ;
— les sous-espaces propres sont **deux à deux orthogonaux** ;
— il existe Q **orthogonale** ($Q^{\mathsf{T}}Q = I$) telle que

$$A = QDQ^{\mathsf{T}}, \qquad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Version endomorphismes : tout endomorphisme **auto-adjoint** d'un espace euclidien est diagonalisable en **base orthonormée**.

Formes quadratiques. À A symétrique on associe $q(x) = x^{\mathsf{T}}Ax = \langle Ax, x\rangle$.

— Dans la base propre orthonormée, $q(x) = \sum_i \lambda_i y_i^2$ — c'est la **réduction** de q.
— **Signature** : (nombre de $\lambda_i > 0$, nombre de $\lambda_i < 0$), invariante (loi d'inertie de Sylvester).

Positivité.

— A est **positive** ($A \in S_n^+$) si $q(x) \geq 0$ pour tout x $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres sont ≥ 0.
— A est **définie positive** (S_n^{++}) si $q(x) > 0$ pour $x \neq 0$ $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres sont > 0 $\Leftrightarrow$ tous les **mineurs principaux dominants** sont > 0 (critère de Sylvester).
— Toute matrice $M^{\mathsf{T}}M$ est **symétrique positive** ; elle est définie positive si et seulement si M est **injective**.

Encadrement de Rayleigh. Pour A symétrique de valeurs propres extrêmes $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$:

$$\lambda_{\min}\|x\|^2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq \lambda_{\max}\|x\|^2$$

Application aux extremums : pour f de classe C^2, en un point critique, la **hessienne** symétrique décide — définie positive ⇒ minimum local, définie négative ⇒ maximum, signature mixte ⇒ point col.

Correction de l'exercice 1 – Diagonalisation orthogonale

— **Spectre** : $\chi_A = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$, valeurs propres **réelles** ✓ (théorème spectral).
— E_3 : $-x + y = 0$, soit $\mathrm{Vect}(1, 1)$. E_1 : $x + y = 0$, soit $\mathrm{Vect}(1, -1)$.
— **Orthogonalité** : $\langle (1,1), (1,-1)\rangle = 0$ ✓ — automatique pour une symétrique.
— **Normalisation** :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = QDQ^{\mathsf{T}}$$

— **Vérification** : $Q^{\mathsf{T}}Q = I$ ✓ ; et $AQ = QD$ se contrôle colonne par colonne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Avantage** : $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$ — aucune inversion à calculer.

Réponse. $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(3, 1)$.

Correction de l'exercice 2 – Réduction d'une forme quadratique

— **Matrice associée** (les termes croisés se partagent en deux) :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Spectre** : $\chi_A = X^2 - 7X + (10 - 4) = X^2 - 7X + 6 = (X - 1)(X - 6)$.

— Donc q se réduit en $Y_1^2 + 6Y_2^2$ dans une base orthonormée adaptée.

— **Signature** : $(2, 0)$ — les deux valeurs propres sont **strictement positives**.

— **Conclusion** : q est **définie positive**.

— **Contrôle par Sylvester** : mineurs dominants $5 > 0$ et $\det A = 10 - 4 = 6 > 0$ ✓

— **Contrôle par Gauss** : $q = 5\left(x + \frac{2y}{5}\right)^2 + \frac{6}{5}y^2$ — somme de deux carrés à coefficients positifs, même signature ✓

Réponse. $q \sim Y_1^2 + 6Y_2^2$, signature $(2, 0)$: définie positive.

Correction de l'exercice 3 – Forme non définie

— **Matrice** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Spectre** : $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X - 3)(X + 1)$, valeurs propres 3 et -1.

— **Signature** : $(1, 1)$ — la forme est **indéfinie**.

— **Réduction de Gauss** : $q = (x + 2y)^2 - 3y^2$, ce qui confirme la signature $(1, 1)$ (un carré positif, un négatif).

— **Vérification directe** : $q(1, 0) = 1 > 0$ et $q(1, -1) = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$ — la forme prend les deux signes ✓

— **Interprétation géométrique** : l'équation $q(x, y) = 1$ décrit une **hyperbole** ; avec une signature $(2, 0)$ on aurait une ellipse.

Réponse. Signature $(1, 1)$: forme indéfinie (hyperbole).

Correction de l'exercice 4 – Critère de Sylvester

Mineurs principaux dominants :

— $\Delta_1 = 2 > 0$.

— $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$.

— $\Delta_3 = \det A$. Développement selon la première ligne :
$2(4 - 1) - (-1)(-2 - 0) = 6 - 2 = 4 > 0$.

— **Conclusion** : tous les mineurs dominants sont strictement positifs, donc A est **définie positive**.

— **Contrôle par le spectre** : les valeurs propres sont 2 et $2 \pm \sqrt{2}$, soit environ $0{,}586$, 2 et $3{,}414$ — toutes positives ✓

— **Cohérence** : leur produit vaut $2(4 - 2) = 4 = \det A$ ✓ et leur somme $6 = \mathrm{tr}(A)$ ✓

— **Contexte** : cette matrice tridiagonale apparaît dans la discrétisation de $-u''$ — sa positivité traduit la stabilité du schéma numérique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Oui : $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 4$, tous > 0.

Correction de l'exercice 5 – Matrice de type M^T M

— **Calcul** : $M^{\mathsf{T}}M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

— **Symétrie** : $\left(M^{\mathsf{T}}M\right)^{\mathsf{T}} = M^{\mathsf{T}}M$ ✓

— **Positivité** : pour tout x, $x^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}Mx = \|Mx\|^2 \geq 0$.

— **Caractère défini** : $\|Mx\| = 0 \Leftrightarrow Mx = 0$. Or M est de rang 2 (colonnes non colinéaires), donc **injective** : $Mx = 0 \Rightarrow x = 0$.

— **Conclusion** : $M^{\mathsf{T}}M$ est **définie positive**.

— **Contrôle** : ses valeurs propres sont 1 et 3, toutes strictement positives ✓

— **Usage** : c'est la matrice des **équations normales** en moindres carrés ; son inversibilité garantit l'unicité de la solution.

Réponse. $M^{\mathsf{T}}M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, définie positive car M est injective.

Correction de l'exercice 6 – Quotient de Rayleigh

— **Spectre** : $\chi_A = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$, donc $\lambda_{\min} = 2$ et $\lambda_{\max} = 4$.

— **Encadrement de Rayleigh** : pour $\|x\| = 1$,

$$2 \leq \langle Ax, x\rangle \leq 4$$

— Les **bornes sont atteintes** aux vecteurs propres unitaires : $\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}$ donne 4, et $\dfrac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$ donne 2.

— **Vérification** : $\left| A\dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}}, \dfrac{(1,1)}{\sqrt{2}} \right| = \dfrac{4+4}{2} = 4$ ✓

— **Démonstration** : en base propre orthonormée, $\langle Ax, x\rangle = \sum \lambda_i y_i^2$ avec $\sum y_i^2 = 1$ — c'est une **moyenne pondérée** des valeurs propres, donc comprise entre les extrêmes.

— **Application** : ce principe variationnel est à la base du calcul numérique des valeurs propres (méthode de la puissance, Courant-Fischer).

Réponse. Maximum 4, minimum 2 (les valeurs propres extrêmes).

Correction de l'exercice 7 – Racine carrée positive

Existence. Le théorème spectral donne $A = QDQ^{\mathsf{T}}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i \geq 0$.

— On pose $B = Q\sqrt{D}\,Q^{\mathsf{T}}$ avec $\sqrt{D} = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_i}\right)$.

— B est **symétrique** ($\left(Q\sqrt{D}\,Q^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = B$), **positive** (valeurs propres $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$), et

$$B^2 = Q\sqrt{D}\,Q^{\mathsf{T}}Q\sqrt{D}\,Q^{\mathsf{T}} = QDQ^{\mathsf{T}} = A$$

Unicité. Soit C symétrique positive avec $C^2 = A$.

— C commute avec $A = C^2$, donc C **stabilise** chaque sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

— Sur $E_\lambda(A)$, C est symétrique positive de carré $\lambda\,\mathrm{id}$: ses valeurs propres μ vérifient $\mu^2 = \lambda$ et $\mu \geq 0$, donc $\mu = \sqrt{\lambda}$.

— C étant diagonalisable, elle vaut $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}$ sur E_λ, donc $C = B$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Exemple** : $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ (valeurs propres 9 et 1) a pour unique racine **positive** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Réponse. $B = Q\sqrt{D}\,Q^{\mathsf{T}}$, unique parmi les symétriques positives.

Correction de l'exercice 8 – Extremums et hessienne

— **Gradient** : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 2y$.

— **Point critique** : $x + 2y = 0$ donne $x = -2y$; en reportant, $-4y + y - 3 = 0$, donc $y = -1$ et $x = 2$.

— Unique point critique : $(2, -1)$, où $f(2, -1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

— **Hessienne** : $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (constante ici, f étant quadratique).

— **Nature** : les valeurs propres de H sont 1 et 3, toutes **strictement positives** — H est **définie positive**.

— **Conclusion** : $(2, -1)$ est un **minimum**, et même un minimum **global** puisque la partie quadratique est définie positive.

— **Contrôle** : $f(0, 0) = 0 > -3$ ✓ et $f(3, -1) = 9 - 3 + 1 - 9 = -2 > -3$ ✓

Réponse. Minimum global en $(2, -1)$, de valeur -3.

Correction de l'exercice 9 – Conique

— **Matrice de la forme quadratique** : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 2 et 4.

— **Base propre orthonormée** : $\dfrac{(1, 1)}{\sqrt{2}}$ (pour 4) et $\dfrac{(1, -1)}{\sqrt{2}}$ (pour 2).

— Dans ces coordonnées (X, Y), l'équation devient $4X^2 + 2Y^2 = 8$, soit

$$\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

— **Nature** : c'est une **ellipse**, de demi-axes $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ (selon la première bissectrice) et 2 (selon la seconde).

— **Contrôle** : le point $(x, y) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ vérifie $3 \times 2 - 2 \times 2 + 3 \times 2 = 8$ ✓ ; il est à distance 2 de l'origine, ce qui correspond bien au grand demi-axe porté par la seconde bissectrice.

— **Règle générale** : la nature de la conique se lit sur les **signes des valeurs propres** — deux positives : ellipse ; signes opposés : hyperbole ; une nulle : parabole ou cas dégénéré.

Réponse. Ellipse de demi-axes 2 et $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Endomorphisme antisymétrique

— **Produit scalaire nul** : $\langle u(x), x\rangle = \langle x, u^*(x)\rangle = -\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle$.

— Donc $2\langle u(x), x\rangle = 0$, soit $\langle u(x), x\rangle = 0$: $u(x)$ est **toujours orthogonal** à x.

— **Valeurs propres réelles** : si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$0 = \langle u(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

— Comme $\|x\| \neq 0$, on obtient $\lambda = 0$.

— **Conséquence dimensionnelle** : en dimension **impaire**, χ_u (de degré impair) a une racine réelle, donc 0 est valeur propre et u n'est **pas inversible**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Exemple en dimension 3** : $u(x) = a \wedge x$ est antisymétrique, de noyau $\mathbb{R}a$ — et $a \wedge x$ est bien orthogonal à x ✓

Réponse. $\langle u(x), x\rangle = 0$, donc toute valeur propre réelle est nulle.

Correction de l'exercice 11 – Trace et valeurs propres

Première égalité : par définition du produit,

$$\operatorname{tr}\left(A^2\right) = \sum_i \left(A^2\right)_{ii} = \sum_i \sum_j a_{ij}a_{ji} = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

— la dernière étape utilisant la **symétrie** $a_{ji} = a_{ij}$.

Seconde égalité : le théorème spectral donne $A = QDQ^{\mathsf{T}}$, donc $A^2 = QD^2Q^{\mathsf{T}}$.

— La trace étant invariante par similitude : $\operatorname{tr}\left(A^2\right) = \operatorname{tr}\left(D^2\right) = \sum_k \lambda_k^2$.

— **Contrôle** avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$: somme des carrés des coefficients $= 9 + 1 + 1 + 9 = 20$; valeurs propres 2 et 4, donc $4 + 16 = 20$ ✓

— **Interprétation** : $\sqrt{\operatorname{tr}\left(A^2\right)}$ est la **norme de Frobenius** de A — elle ne dépend que du spectre pour une matrice symétrique.

Réponse. Double somme des carrés = somme des λ_k^2.

Correction de l'exercice 12 – Diagonalisation orthogonale de 3I - J

a) J a pour valeurs propres 3 (sur $\mathbb{R}(1,1,1)$) et 0 (sur le plan $x + y + z = 0$). Donc A a pour valeurs propres 0 (simple) et 3 (double).

b) $E_0 = \mathbb{R}(1,1,1)$, $E_3 = \{x + y + z = 0\}$, orthogonaux. Base orthonormée de E_3 par Gram-Schmidt : $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. Avec $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(0,3,3)$$

c) Les valeurs propres sont ≥ 0 : A est positive ($X^{\mathsf{T}}AX = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$). Elle n'est pas définie car $A(1,1,1) = 0$.

Réponse. $\operatorname{Sp}A = \{0,3,3\}$; $A = PDP^{\mathsf{T}}$, $D = \operatorname{diag}(0,3,3)$; positive non définie.

Correction de l'exercice 13 – Positivité et signe des valeurs propres

a) $S = PDP^{\mathsf{T}}$ avec P orthogonale ; en posant $Y = P^{\mathsf{T}}X$:

$$X^{\mathsf{T}}SX = Y^{\mathsf{T}}DY = \sum_i \lambda_i y_i^2$$

— positif pour tout Y si et seulement si tous les $\lambda_i \geq 0$ (prendre $Y = e_i$ pour la réciproque).

b) S définie positive $\Leftrightarrow \operatorname{Sp}S \subset \mathbb{R}_+^*$.

c) A : valeurs propres 1 et 3, définie positive. B : valeurs propres 3 et -1, ni positive ni négative ; en effet $(1,-1)B(1,-1)^{\mathsf{T}} = 1 - 4 + 1 = -2 < 0$.

Réponse. $S \in S_n^+ \Leftrightarrow \operatorname{Sp}S \subset \mathbb{R}_+$; A définie positive, B non positive.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Matrices symétriques d'ordre fini

a) Les valeurs propres de A sont réelles (théorème spectral) et vérifient $\lambda^k = 1$: $\lambda = \pm 1$.

b) $A = PDP^{\mathsf{T}}$ avec D diagonale à coefficients ± 1, donc $D^2 = I$ et $A^2 = I$. A est symétrique et vérifie $A^{\mathsf{T}}A = A^2 = I$:

$$A \in O(n) \cap S_n(\mathbb{R})$$

— c'est une symétrie orthogonale.

c) Si k est impair, $(-1)^k = -1 \neq 1$: seule la valeur propre 1 est possible, et A diagonalisable de seule valeur propre 1 vaut I.

Réponse. Valeurs propres ± 1 ; $A^2 = I$ (symétrie orthogonale) ; $A = I$ si k impair.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : réduction complète

a) - **Astuce** : $A = 2J - I$ où J est la matrice pleine de 1.

— J a pour valeurs propres 3 (vecteur $(1,1,1)$) et 0 (double, sur le plan $x + y + z = 0$).
— Donc $A = 2J - I$ a pour valeurs propres $2 \times 3 - 1 = 5$ et $2 \times 0 - 1 = -1$ (double).
— **Vérifications** : $\operatorname{tr}(A) = 3 = 5 - 1 - 1$ ✓ ; $\det A = 5 \times 1 = 5$ (à vérifier par Sarrus : $1 + 8 + 8 - 4 - 4 - 4 = 5$) ✓
— **Vecteurs propres** : $E_5 = \operatorname{Vect}(1,1,1)$; E_{-1} est le plan $x + y + z = 0$, orthogonal au précédent ✓
— **Base orthonormée** : $\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$, $\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}$, et $Q^{\mathsf{T}}AQ = \operatorname{diag}(5,-1,-1)$.

b) La matrice de q est exactement A (les coefficients croisés 4 se partagent en $2 + 2$).

— La réduction donne $q = 5X^2 - Y^2 - Z^2$.
— **Signature** : $(1,2)$ — la forme est **indéfinie**, non dégénérée (aucune valeur propre nulle).
— **Contrôle** : $q(1,1,1) = 3 + 12 = 15 > 0$ ✓ et $q(1,-1,0) = 2 - 4 = -2 < 0$ ✓ — les deux signes sont bien atteints.

Réponse. a) $\operatorname{diag}(5,-1,-1)$ · b) signature $(1,2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).