Plaquette 2 – Diagonalisation orthogonale en pratique

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Diagonalisation orthogonale.

— $S = PDP^{\mathsf{T}}$ avec $P \in O(n)$: colonnes = base orthonormée de vecteurs propres.

— Décomposition spectrale : avec (u_i) base orthonormée propre,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i u_i^{\mathsf{T}}, \qquad S^k = \sum \lambda_i^k u_i u_i^{\mathsf{T}}, \qquad \exp(S) = \sum \mathrm{e}^{\lambda_i} u_i u_i^{\mathsf{T}}$$

— **Contrôles** : $\mathrm{tr} S = \sum \lambda_i$, $\det S = \prod \lambda_i$, $\|S\|_F^2 = \sum_{i,j} s_{ij}^2 = \sum \lambda_i^2$.

— $\lambda_{\min} \leq s_{ii} \leq \lambda_{\max}$ (prendre $x = e_i$ dans l'encadrement de Rayleigh).

— Deux matrices symétriques qui commutent sont diagonalisables dans une **même** base orthonormée.

Correction de l'exercice 1 – Une matrice symétrique 2 × 2

a) $\mathrm{tr} S = 7$, $\det S = 6$: $\chi_S = X^2 - 7X + 6 = (X-1)(X-6)$.

b) $S - 6I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$: $E_6 = \mathbb{R}(2,1)$. $E_1 = E_6^{\perp} = \mathbb{R}(1,-2)$. Donc

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad P^{\mathsf{T}} S P = \mathrm{diag}(6,1)$$

c) $36 + 1 = 37$ et $25 + 4 + 4 + 4 = 37$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp} S = \{6, 1\}$; $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 2 – Valeurs propres distinctes : orthogonalité automatique

a) $S(1,2,1) = (1,2,1)$, $S(1,0,-1) = (3,0,-3)$, $S(1,-1,1) = (4,-4,4)$: valeurs propres 1, 3, 4.

b) Les produits scalaires $1 + 0 - 1$, $1 - 2 + 1$, $1 + 0 - 1$ sont nuls. Pour S symétrique, $Sx = \lambda x$ et $Sy = \mu y$ donnent

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

— d'où $\langle x, y \rangle = 0$ si $\lambda \neq \mu$.

c) On normalise : $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(1,3,4)$. Contrôle : $\mathrm{tr} S = 8 = 1 + 3 + 4$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp} S = \{1, 3, 4\}$, vecteurs $(1,2,1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-1,1)$ orthogonaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Une valeur propre double : Gram-Schmidt dans l'espace propre

a) J a pour valeurs propres 3 et 0 (double) : S a 5 (simple) et -1 (double).

b) $E_{-1} = \{x+y+z=0\}$, de base $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, non orthogonale. Gram-Schmidt : $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$ puis $(1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \frac{1}{2}(1,1,-2)$, d'où $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

c) $p_5 = \frac{1}{3}J$ (projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}(1,1,1)$) et $p_{-1} = I - \frac{1}{3}J$:

$$S = 5\cdot\frac{1}{3}J - \left(I - \frac{1}{3}J\right) = 2J - I$$

Réponse. $\mathrm{Sp}S = \{5,-1,-1\}$; $u_1 = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}$; $S = 5p_5 - p_{-1}$.

Correction de l'exercice 4 – Une famille paramétrée

a) $S(1,1) = (a+b)(1,1)$ et $S(1,-1) = (a-b)(1,-1)$. Avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$:

$P^{\mathsf{T}}SP = \mathrm{diag}(a+b, a-b)$.

b) Valeurs propres > 0 : $a > |b|$.

c) Avec les projecteurs $p_{\pm} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \pm 1\\ \pm 1 & 1\end{pmatrix}$:

$$S^n = (a+b)^n p_+ + (a-b)^n p_-, \qquad \exp(S) = \mathrm{e}^a\begin{pmatrix}\cosh b & \sinh b\\ \sinh b & \cosh b\end{pmatrix}$$

Réponse. Vecteurs propres $(1,\pm 1)$, valeurs $a \pm b$; définie positive ssi $a > |b|$; $\exp(S) = \mathrm{e}^a\begin{pmatrix}\cosh b & \sinh b\\ \sinh b & \cosh b\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 – Les symétriques complexes ne sont pas diagonalisables en général

a) $A^{\mathsf{T}} = A$ se lit. $A^2 = \begin{pmatrix}1-1 & i-i\\ i-i & -1+1\end{pmatrix} = 0$.

b) A est nilpotente non nulle, donc non diagonalisable.

c) Le théorème spectral utilise le produit scalaire **réel** : pour A réelle symétrique, $\overline{X}^{\mathsf{T}}AX$ est réel. La bonne généralisation concerne les matrices **hermitiennes** ($\overline{A}^{\mathsf{T}} = A$), diagonalisables en base orthonormée pour le produit scalaire hermitien, à valeurs propres réelles :

$$\overline{A}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix}1 & -i\\ -i & -1\end{pmatrix} \neq A$$

— donc A n'est pas hermitienne.

Réponse. $A^{\mathsf{T}} = A$ mais $A^2 = 0$, non diagonalisable ; il faut l'hypothèse hermitienne.

Correction de l'exercice 6 – Coefficients diagonaux et valeurs propres extrêmes

a) $s_{ii} = e_i^{\mathsf{T}}Se_i$, et l'encadrement de Rayleigh avec $x = e_i$ unitaire donne le résultat.

b) Dans une base orthonormée propre, $\frac{x^{\mathsf{T}}Sx}{x^{\mathsf{T}}x} = \frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2}$, moyenne pondérée des λ_i.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $\lambda_1 \le \min(1,2) = 1$ et $\lambda_2 \ge \max(1,2) = 2$. Calcul : $\chi_S = X^2 - 3X - 7$,

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \approx -1{,}54 \text{ et } 4{,}54$$

Réponse. $\lambda_1 \le s_{ii} \le \lambda_n$; ici $\frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Norme de Frobenius et valeurs propres

a) S^2 a pour valeurs propres les λ_i^2, donc $\mathrm{tr} S^2 = \sum \lambda_i^2$; et $\mathrm{tr}(S^2) = \mathrm{tr}(S^{\mathsf{T}} S) = \sum s_{ij}^2$.

b) $\sum s_{ij}^2 = \sum \lambda_i^2 \le n$.

c) $\mathrm{tr} S^2 = \sum s_{ij}^2 = 0$ impose $S = 0$. Faux sans symétrie :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{tr}(N^2) = 0, \quad N \neq 0$$

Réponse. $\mathrm{tr} S^2 = \sum \lambda_i^2 = \sum s_{ij}^2$; $S = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr} S^2 = 0$ (faux pour N non symétrique).

Correction de l'exercice 8 – Codiagonalisation de deux symétriques

a) $Ax = \lambda x$ donne $A(Bx) = BAx = \lambda Bx$.

b) Sur chaque $E_\lambda(A)$, l'induit de B est symétrique (restriction d'un auto-adjoint à un stable), donc diagonalisable en base orthonormée de $E_\lambda(A)$. Les $E_\lambda(A)$ étant orthogonaux, la réunion de ces bases convient.

c) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA$. Base $u_1 = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$:

$$A \sim \mathrm{diag}(2,0), \qquad B \sim \mathrm{diag}(1,3)$$

Réponse. Base orthonormée commune $\frac{(1,\pm 1)}{\sqrt{2}}$; $A \sim \mathrm{diag}(2,0)$, $B \sim \mathrm{diag}(1,3)$.

Correction de l'exercice 9 – Spectres de $A^{\mathsf{s}}A$ et AA^{s}

a) $X^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} A X = \|AX\|^2 \ge 0$, de même pour AA^{T}.

b) Si $A^{\mathsf{T}} A X = \lambda X$, $\lambda \neq 0$, alors $AX \neq 0$ et $AA^{\mathsf{T}}(AX) = \lambda AX$. L'application $X \mapsto AX$ est injective de $E_\lambda(A^{\mathsf{T}}A)$ dans $E_\lambda(AA^{\mathsf{T}})$; par symétrie des rôles, les dimensions sont égales.

c) $AA^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 3 et 1. Donc

$$\mathrm{Sp}(A^{\mathsf{T}}A) = \{3, 1, 0\}$$

— ($A^{\mathsf{T}}A$ est 3×3 de rang 2).

Réponse. Mêmes valeurs propres non nulles ; ici $\mathrm{Sp}(AA^{\mathsf{T}}) = \{3,1\}$, $\mathrm{Sp}(A^{\mathsf{T}}A) = \{3,1,0\}$.

Correction de l'exercice 10 – Analyse en composantes principales

a) $\sum x_k x_k^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 4+4+1+1 & 4+4-1-1 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$, d'où $C = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$.

b) Valeurs propres 4 (vecteur $\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$) et 1 (vecteur $\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}$).

c) La variance de la projection sur u unitaire vaut $u^{\mathsf{T}} C u$, maximale ($= 4$) pour $u = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$: c'est la première composante principale. Elle explique

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{4}{4+1} = 80\,\%$$

— de la variance totale $\mathrm{tr} C = 5$.

Réponse. $C = \begin{pmatrix} 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}5 \end{pmatrix}$; axe principal $(1,1)$, 80 % de la variance.

Correction de l'exercice 11 – Puissances et exponentielle d'une symétrique

a) $p_6 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $p_1 = I - p_6 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

b) $S^n = 6^n p_6 + p_1$ et

$$\exp(tS) = \mathrm{e}^{6t} p_6 + \mathrm{e}^{t} p_1$$

— Vérification pour $n=1$: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 24+1 & 12-2 \\ 12-2 & 6+4 \end{pmatrix} = S$ ✓.

c) $\frac{S^n}{6^n} = p_6 + 6^{-n} p_1 \to p_6$, projecteur orthogonal sur la direction propre dominante.

Réponse. $S^n = 6^n p_6 + p_1$, $\exp(tS) = \mathrm{e}^{6t} p_6 + \mathrm{e}^{t} p_1$; $\frac{S^n}{6^n} \to p_6$.

Correction de l'exercice 12 – Symétrique et orthogonale : diagonalisation

a) Symétrique visiblement ; $S = \frac{2}{3}J - I$ et $S^2 = \frac{4}{9}J^2 - \frac{4}{3}J + I = \frac{4}{3}J - \frac{4}{3}J + I = I$, donc $S^{\mathsf{T}} S = I$.

b) $S^2 = I$: valeurs propres ± 1. $E_1 = \mathbb{R}(1,1,1)$ (car $J(1,1,1) = 3(1,1,1)$, donc $S(1,1,1) = (1,1,1)$) et $E_{-1} = \{x+y+z=0\}$:

$$\mathrm{Sp} S = \{1, -1, -1\}$$

c) Symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}(1,1,1)$, c'est-à-dire le demi-tour d'axe $(1,1,1)$ ($\det S = 1$).

Réponse. $S^2 = I$; $E_1 = \mathbb{R}(1,1,1)$, E_{-1} = plan orthogonal ; demi-tour d'axe $(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 13 – Une matrice symétrique par blocs

a) $M(X,X) = (2AX, 2AX) = 2\lambda(X,X)$ et $M(X,-X) = (0,0)$.

b) Si (u_i) est une base orthonormée propre de A, les $\frac{1}{\sqrt{2}}(u_i, u_i)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(u_i, -u_i)$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$:

$$\mathrm{Sp} M = \{2\lambda_1, \ldots, 2\lambda_n\} \cup \{0\} \text{ (multiplicité } n)$$

c) A a pour valeurs propres 3 et 1 : $\mathrm{Sp} M = \{6, 2, 0, 0\}$. Contrôle : $\mathrm{tr} M = 2\mathrm{tr} A = 8$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp} M = 2\mathrm{Sp} A \cup \{0\}$; ici $\{6, 2, 0, 0\}$.

Correction de l'exercice 14 – Endomorphisme symétrique de rang 2

a) $S^{\mathsf{T}} = ba^{\mathsf{T}} + ab^{\mathsf{T}} = S$. $\mathrm{Im} S \subset \mathrm{Vect}(a,b)$ et $Sa = b$, $Sb = a$: rang 2.

b) $S(a+b) = b + a$ et $S(a-b) = b - a = -(a-b)$.

c) Valeurs propres 1 (sur $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$), -1 (sur $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$) et 0 (sur $\mathrm{Vect}(a,b)^{\perp}$, dimension $n-2$).

Avec $u = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$:

$$S = uu^{\mathsf{T}} - vv^{\mathsf{T}}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\mathrm{Sp}S = \{1, -1, 0\}$; $S = uu^{\mathsf{T}} - vv^{\mathsf{T}}$, $u = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$, $v = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète d'une matrice symétrique

a) $u_1 = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}$, $u_2 = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}$, $u_3 = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$:

$$S = u_1 u_1^{\mathsf{T}} + 3u_2 u_2^{\mathsf{T}} + 4u_3 u_3^{\mathsf{T}}$$

b) $\sqrt{S} = u_1 u_1^{\mathsf{T}} + \sqrt{3}\, u_2 u_2^{\mathsf{T}} + 2u_3 u_3^{\mathsf{T}}$: symétrique positive et de carré S (les produits croisés s'annulent).

c) Rayleigh : $\min q = 1$ atteint en $\pm u_1$, $\max q = 4$ atteint en $\pm u_3$.

d) $\det S = 1 \times 3 \times 4 = 12$ et $\mathrm{tr} S^{-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12}$.

Réponse. $S = u_1 u_1^{\mathsf{T}} + 3u_2 u_2^{\mathsf{T}} + 4u_3 u_3^{\mathsf{T}}$; $\min q = 1$, $\max q = 4$; $\det S = 12$, $\mathrm{tr} S^{-1} = \frac{19}{12}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).