Plaquette 4 – Formes quadratiques, quotient de Rayleigh et principe du min-max

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Quotient de Rayleigh. Pour S symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$:

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^{\mathsf{T}} S x}{x^{\mathsf{T}} x}, \qquad \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^{\mathsf{T}} S x}{x^{\mathsf{T}} x}$$

— **Courant-Fischer** : $\lambda_k = \min_{\dim F = k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} R(x)$.

— **Loi d'inertie** : le nombre de carrés positifs et négatifs dans toute réduction de q en carrés de formes indépendantes est invariant (signature).

— **Coniques** $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = 1$: ellipse si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, hyperbole si de signes opposés.

— **Extremum local** en un point critique : hessienne définie positive (minimum), définie négative (maximum), valeurs propres de signes opposés (point col).

Correction de l'exercice 1 – Extremums d'une forme quadratique sur le cercle

a) $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, valeurs propres 6 et 1, de vecteurs $(2,1)$ et $(1,-2)$.

b) Rayleigh : sur le cercle unité,

$$\max q = 6 \text{ en } \pm\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}, \qquad \min q = 1 \text{ en } \pm\frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$$

c) En $\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$: $q = \frac{5\times 4 + 4\times 2 + 2\times 1}{5} = \frac{30}{5} = 6$ ✓.

Réponse. $\max q = 6$ en $\pm\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$, $\min q = 1$ en $\pm\frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$.

Correction de l'exercice 2 – Maximum de xy + yz + zx sur la sphère

a) $S = \frac{1}{2}(J - I)$.

b) J a pour valeurs propres 3 et 0 (double), donc S a 1 et $-\frac{1}{2}$ (double) :

$$\max_{\|x\| = 1} q = 1 \text{ en } \pm\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \qquad \min q = -\frac{1}{2}$$

— le minimum étant atteint sur le cercle $\{x + y + z = 0\}$ de la sphère.

c) Sur la sphère, $q = \frac{(x+y+z)^2 - 1}{2}$, et par Cauchy-Schwarz $(x+y+z)^2 \le 3$: $q \le 1$. Et $q \ge -\frac{1}{2}$ avec égalité ssi $x + y + z = 0$.

Réponse. $S = \frac{1}{2}(J - I)$; $\max q = 1$, $\min q = -\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Le principe du min-max

a) Pour $x = \sum_{i \le k} y_i u_i$: $R(x) = \frac{\sum \lambda_i y_i^2}{\sum y_i^2} \le \lambda_k$, avec égalité en u_k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\dim F + \dim \mathrm{Vect}(u_k, \dots, u_n) = k + (n-k+1) = n+1 > n$: l'intersection contient $x \neq 0$, et pour ce x :

$$R(x) = \frac{\sum_{i \geq k} \lambda_i y_i^2}{\sum_{i \geq k} y_i^2} \geq \lambda_k$$

c) b) donne $\max_F R \geq \lambda_k$ pour tout F de dimension k, et a) montre que F_k réalise l'égalité.

Réponse. $\max_{F_k} R = \lambda_k$, et tout F de dimension k rencontre $\mathrm{Vect}(u_k, \dots, u_n)$: $\lambda_k = \min \max R$.

Correction de l'exercice 4 – Monotonie des valeurs propres (Weyl)

a) Pour tout x, $R_{A+B}(x) = R_A(x) + R_B(x) \geq R_A(x)$. Donc pour tout F, $\max_F R_{A+B} \geq \max_F R_A$, puis on prend le minimum sur les F de dimension k.

b) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi = X^2 - 6X + 7$, valeurs propres $3 \pm \sqrt{2}$:

$$3 - \sqrt{2} \approx 1{,}59 \geq 1, \qquad 3 + \sqrt{2} \approx 4{,}41 \geq 3$$

c) $\lambda_1(B) \leq R_B(x) \leq \lambda_n(B)$, donc $R_A + \lambda_1(B) \leq R_{A+B} \leq R_A + \lambda_n(B)$, et le min-max conserve ces inégalités.

Réponse. $\lambda_k(A+B) \geq \lambda_k(A)$ si $B \geq 0$; exemple $3 \pm \sqrt{2}$; encadrement de Weyl.

Correction de l'exercice 5 – Nature d'une conique

a) Valeurs propres 6 et 1, axes $u = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$ et $v = \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}$. En coordonnées (X, Y) dans (u, v) : $6X^2 + Y^2 = 6$.

b) $X^2 + \frac{Y^2}{6} = 1$: ellipse d'axes dirigés par u et v, de demi-axes 1 (selon u) et $\sqrt{6}$ (selon v).

c) Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, valeurs propres 3 et -1, axes $(1,1)$ et $(1,-1)$:

$$3X^2 - Y^2 = 3 \Leftrightarrow X^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$$

— hyperbole d'axe focal dirigé par $(1,1)$.

Réponse. Ellipse $X^2 + \frac{Y^2}{6} = 1$ (demi-axes 1 et $\sqrt{6}$) ; hyperbole $X^2 - \frac{Y^2}{3} = 1$.

Correction de l'exercice 6 – Nature d'une quadrique

a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, valeurs propres 1 (vecteurs e_1 et $\frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}}$) et -1 (vecteur $\frac{(0,1,-1)}{\sqrt{2}}$).

b) Dans cette base : $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$.

c) Hyperboloïde de révolution **à une nappe**, d'axe dirigé par $(0,1,-1)$. En effet, pour chaque valeur de Z, la section est le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1 + Z^2$$

Réponse. Signature $(2,1)$: $X^2 + Y^2 - Z^2 = 1$, hyperboloïde à une nappe d'axe $(0,1,-1)$.

Correction de l'exercice 7 – Signature par la méthode de Gauss

a) $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$: signature $(1,1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $q_2 = (x+y+z)^2 - y^2 - z^2$ (on vérifie : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$). Signature $(1,2)$.

c) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: $\det S = 1(0-1) - 1(0-1) + 1(1-0) = 1 > 0$, donc le nombre de valeurs propres négatives est pair. Or $q_2(0,1,-1) = -2 < 0$: il y en a au moins une, donc exactement deux, et

$$\text{signature} = (1,2)$$

Réponse. xy : $(1,1)$; $q_2 = (x+y+z)^2 - y^2 - z^2$, signature $(1,2)$.

Correction de l'exercice 8 – Norme d'une matrice symétrique

a) En base orthonormée propre, $\|Sx\|^2 = \sum \lambda_i^2 y_i^2 \le \rho^2 \sum y_i^2$, avec égalité sur un vecteur propre de valeur propre de module maximal.

b) $|x^{\mathsf{T}} S x| = \sum \lambda_i y_i^2 \le \rho$ pour $\|x\| = 1$, avec égalité sur le même vecteur propre.

c) Valeurs propres 4 et -2 :

$$\|S\| = 4$$

— (atteinte en $\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$).

Réponse. $\|S\| = \rho(S) = \sup |x^{\mathsf{T}} S x|$; ici 4.

Correction de l'exercice 9 – Réduction simultanée de deux formes quadratiques

a) $C = A^{-1/2} B A^{-1/2}$ est symétrique : $C = Q D Q^{\mathsf{T}}$, Q orthogonale. Avec $P = A^{-1/2} Q$: $P^{\mathsf{T}} A P = Q^{\mathsf{T}} Q = I$ et $P^{\mathsf{T}} B P = D$.

b) $\det(B - \lambda A) = \det(A^{1/2})^2 \det(C - \lambda I)$, nul si et seulement si $\lambda \in \mathrm{Sp} C$.

c) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -4\lambda \end{pmatrix} = 4\lambda^2 - 1 = 0$:

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

— La forme $2xy$ est « diagonale » relativement à la forme $x^2 + 4y^2$ avec les coefficients $\pm\frac{1}{2}$.

Réponse. $P = A^{-1/2} Q$; coefficients racines de $\det(B - \lambda A)$; ici $\pm\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Extremum local par la hessienne

a) $\partial_x f = 2x + y - 3 = 0$ et $\partial_y f = x + 2y = 0$: $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

b) $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, valeurs propres 1 et 3 : définie positive, minimum local.
$f(2,-1) = 4 - 2 + 1 - 6 = -3$.

c) f est polynomiale de degré 2, donc égale à son développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$f(x,y) = -3 + \frac{1}{2}(h,k) H (h,k)^{\mathsf{T}} = -3 + h^2 + hk + k^2$$

— avec $h = x - 2$, $k = y + 1$; la forme est définie positive, d'où $f \ge -3$ partout.

Réponse. Point critique $(2,-1)$, hessienne définie positive : minimum global -3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Point col

a) $\nabla f = (2x + 4y, 4x + 2y) = 0$: le système de déterminant $4 - 16 \neq 0$ n'a que la solution nulle.

b) $H = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, valeurs propres 6 (vecteur $(1,1)$) et -2 (vecteur $(1,-1)$).

c) $f(t,t) = 6t^2 > 0$ et $f(t,-t) = -2t^2 < 0$ pour $t \neq 0$: f prend des deux signes au voisinage de 0, qui est un **point col**.

$$f = 3X^2 - Y^2, \qquad X = \frac{x+y}{\sqrt{2}},\ Y = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

Réponse. Hessienne de valeurs propres 6 et -2 : point col ; croît selon $(1,1)$, décroît selon $(1,-1)$.

Correction de l'exercice 12 – Maximum d'une forme linéaire sur un ellipsoïde

a) $x^{\mathsf{T}} S x = \|y\|^2 = 1$ et $c^{\mathsf{T}} x = (S^{-1/2}c)^{\mathsf{T}} y \leq \|S^{-1/2}c\|$ par Cauchy-Schwarz, avec $\|S^{-1/2}c\|^2 = c^{\mathsf{T}} S^{-1} c$.

b) Égalité pour y colinéaire à $S^{-1/2}c$, d'où $x^* = \dfrac{S^{-1}c}{\sqrt{c^{\mathsf{T}} S^{-1} c}}$.

c) $S = \mathrm{diag}(1,4)$, $c = (1,1)$: $c^{\mathsf{T}} S^{-1} c = 1 + \frac{1}{4}$, d'où

$$\max(x+y) = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad x^* = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(1, \frac{1}{4}\right)$$

— Vérification : $\frac{4}{5}\left(1 + \frac{4}{16}\right) = 1$ ✓.

Réponse. $\max c^{\mathsf{T}} x = \sqrt{c^{\mathsf{T}} S^{-1} c}$; ici $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 13 – Deuxième valeur propre par contrainte d'orthogonalité

a) $u_n^{\perp} = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_{n-1})$ (stable), sur lequel R est majorée par λ_{n-1}, atteint en u_{n-1}.

b) Les valeurs propres de S sont 1, 3, 4 : le maximum de R sur le plan $x - y + z = 0$ est 3, atteint en $(1,0,-1)$.

c) $x = (1,0,-1)$ vérifie $x \perp u_3$ et $Sx = (3,0,-3)$:

$$R(x) = \frac{3 + 0 + 3}{2} = 3$$

Réponse. $\max_{x \perp u_n} R = \lambda_{n-1}$; ici 3, atteint en $(1,0,-1)$.

Correction de l'exercice 14 – Inertie et invariance de la signature

a) Notons $p(S)$ la dimension maximale d'un sous-espace où q est définie positive. Avec une base propre, $\mathrm{Vect}(u_i)_{\lambda_i > 0}$ convient, et tout F de dimension plus grande rencontre $\mathrm{Vect}(u_i)_{\lambda_i \leq 0}$ (dimensions), où $q \leq 0$. Donc $p(S)$ est le nombre de $\lambda_i > 0$. Or $q(Px)$ est définie positive sur F si et seulement si q l'est sur $P(F)$: $p(P^{\mathsf{T}} S P) = p(S)$.

b) Une réduction en carrés de formes indépendantes est une écriture $S = P^{\mathsf{T}} D P$ avec D diagonale.

c) Valeurs propres $3, -1$ et $1, -1$: même signature $(1,1)$ et même rang, donc congruentes :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

signature$(1,1)$ pour les deux

Réponse. $p(S)$ = dimension maximale d'un sous-espace de positivité : invariant ; les deux matrices sont congruentes (signature $(1,1)$).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un ellipsoïde de révolution

a) Coefficients diagonaux $2 = 1+1$ et termes croisés 1 : $S = I + J$. Valeurs propres 4 (sur $(1,1,1)$) et 1 (double, sur le plan $x+y+z=0$).

b) En coordonnées (X,Y,Z) dans $\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$, $\frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $\frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}$:

$$q = 4X^2 + Y^2 + Z^2$$

c) $X^2 + \frac{Y^2}{4} + \frac{Z^2}{4} = 1$: ellipsoïde de révolution d'axe $\mathbb{R}(1,1,1)$, de demi-axes 1 (selon l'axe) et 2 (dans le plan orthogonal).

d) Sur E, $\|x\|^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ est minimal ($=1$) aux pôles $\pm\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ et maximal ($=4$) sur le cercle équatorial de rayon 2 dans le plan $x+y+z=0$.

Réponse. $S = I + J$, $q = 4X^2 + Y^2 + Z^2$; ellipsoïde de révolution d'axe $(1,1,1)$, demi-axes 1 et 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).