Plaquette 3 – Matrices symétriques positives et définies positives

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Positivité.

— $S \in S_n^{++} \Leftrightarrow \mathrm{Sp} S \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow$ mineurs principaux dominants $> 0 \Leftrightarrow S = LL^{\mathsf{T}}$ avec L triangulaire inférieure inversible (Cholesky).

— $S \in S_n^{+} \Leftrightarrow S = M^{\mathsf{T}}M \Leftrightarrow S$ est une matrice de Gram.

— **Racine carrée** : tout $S \in S_n^+$ a une unique racine $S^{1/2} \in S_n^+$.

— Si $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$: AB est semblable à la symétrique $A^{1/2}BA^{1/2}$.

— **Hadamard** : pour $S \in S_n^+$,

$$\det S \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$$

Correction de l'exercice 1 – Critère de Sylvester avec un paramètre

a) $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 4 - 1 = 3$, $\Delta_3 = \det S_a = 2(2a-1) - 1(a-0) = 3a - 2$.

b) Sylvester : définie positive $\Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$:

$$S_a \in S_3^{++} \Leftrightarrow a > \frac{2}{3}$$

c) Pour $a = \frac{2}{3}$, $\det = 0$; S_a est limite de matrices définies positives ($a \to \frac{2}{3}^+$), donc positive (l'ensemble S_3^+ est fermé). Noyau : $2x + y = 0$, $x + 2y + z = 0$ donnent $(1, -2, 3)$, et la troisième ligne $-2 + 2 = 0$ ✓.

Réponse. Mineurs 2, 3, $3a - 2$; définie positive ssi $a > \frac{2}{3}$; pour $a = \frac{2}{3}$, noyau $\mathbb{R}(1, -2, 3)$.

Correction de l'exercice 2 – Décomposition de Cholesky

a) Mineurs $4 > 0$ et $20 - 4 = 16 > 0$.

b) $LL^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \ell_{11}^2 & \ell_{11}\ell_{21} \\ \ell_{11}\ell_{21} & \ell_{21}^2 + \ell_{22}^2 \end{pmatrix}$, d'où $\ell_{11} = 2$, $\ell_{21} = 1$, $\ell_{22} = 2$:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) $LY = (2, 3)$ donne $Y = (1, 1)$, puis $L^{\mathsf{T}}X = Y$ donne $x_2 = \frac{1}{2}$ et $2x_1 + x_2 = 1$, soit $x_1 = \frac{1}{4}$. Vérification : $S\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = (1 + 1, \frac{1}{2} + \frac{5}{2}) = (2, 3)$ ✓.

Réponse. $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 3 – Matrices de Gram

a) Pour $x \in \mathbb{R}^p$:

$$x^{\mathsf{T}}Gx = \sum_{i,j} x_i x_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_i x_i v_i^{\,2} \geq 0$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $x^{\mathsf{T}}Gx = 0 \Leftrightarrow \sum x_i v_i = 0$: G est définie si et seulement si la seule combinaison nulle est triviale.

c) $S = S^{1/2}S^{1/2} = (S^{1/2})^{\mathsf{T}}S^{1/2}$: $s_{ij} = \langle c_i, c_j\rangle$ où c_i est la i-ième colonne de $S^{1/2}$.

Réponse. $x^{\mathsf{T}}Gx = \left\|\sum x_i v_i\right\|^2$; définie ssi famille libre ; $S = (S^{1/2})^{\mathsf{T}}S^{1/2}$.

Correction de l'exercice 4 – La matrice de Hilbert

a) $\int_0^1 t^{i+j-2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i+j-1}$.

b) H_n est la matrice de Gram de la famille $(1, t, \dots, t^{n-1})$ pour $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$. Cette famille est libre, donc $H_n \in S_n^{++}$.

c) $\det H_2 = 1\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Mineurs de H_3 :

$$1 > 0, \qquad \frac{1}{12} > 0, \qquad \frac{1}{2160} > 0$$

— La matrice est définie positive mais très mal conditionnée (déterminant minuscule).

Réponse. H_n = Gram des monômes : définie positive ; $\det H_2 = \frac{1}{12}$.

Correction de l'exercice 5 – Inégalité d'Hadamard

a) $s_{ii} = e_i^{\mathsf{T}}Se_i > 0$. T est congruente à S, donc définie positive, et $t_{ii} = \frac{s_{ii}}{s_{ii}} = 1$.

b) Les valeurs propres $\mu_i > 0$ de T vérifient $\sum \mu_i = \mathrm{tr}T = n$, donc

$$\det T = \prod \mu_i \le \left(\frac{\sum \mu_i}{n}\right)^n = 1$$

c) $\det S = \det D \det T \le \prod s_{ii}$. Exemple : $\det S = 12 \le 3\times 2\times 3 = 18$ ✓.

Réponse. $\det T \le 1$ (AM-GM) ; $\det S \le \prod s_{ii}$; ici $12 \le 18$.

Correction de l'exercice 6 – Trace d'un produit de positives

a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(AB^{1/2}B^{1/2}) = \mathrm{tr}(B^{1/2}AB^{1/2})$ (cyclicité).

b) $C = B^{1/2}AB^{1/2}$ est symétrique positive ($x^{\mathsf{T}}Cx = (B^{1/2}x)^{\mathsf{T}}A(B^{1/2}x) \ge 0$), de trace ≥ 0.

c) $\mathrm{tr}C = 0$ avec C positive impose $C = 0$ (valeurs propres positives de somme nulle). Or $C = (A^{1/2}B^{1/2})^{\mathsf{T}}(A^{1/2}B^{1/2})$, donc

$$\mathrm{tr}C = \|A^{1/2}B^{1/2}\|_F^2 = 0$$

— d'où $A^{1/2}B^{1/2} = 0$, puis $AB = A^{1/2}(A^{1/2}B^{1/2})B^{1/2} = 0$.

Réponse. $\mathrm{tr}(AB) = \|A^{1/2}B^{1/2}\|_F^2 \ge 0$, nul ssi $AB = 0$.

Correction de l'exercice 7 – Unicité de la racine carrée positive

a) $RS = R^3 = SR$.

b) L'induit R_λ est symétrique positif (restriction), diagonalisable de valeurs propres $\mu \ge 0$ avec $\mu^2 = \lambda$, donc $\mu = \sqrt{\lambda}$: $R_\lambda = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}$.

c) R est déterminée sur chaque $E_\lambda(S)$, donc sur $E = \bigoplus E_\lambda(S)$. Pour l'exemple : valeurs propres 9 et 1, projecteurs $p_9 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $p_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sqrt{S} = 3p_9 + p_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse. $R = \sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}$ sur $E_\lambda(S)$: unicité ; $\sqrt{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 – Le produit AB a des valeurs propres réelles

a) $A^{1/2}A^{1/2}BA^{1/2}A^{-1/2} = AB$.

b) AB est semblable à $C = A^{1/2}BA^{1/2}$, symétrique réelle, donc diagonalisable à valeurs propres réelles. Si $B \in S_n^+$, C l'est aussi.

c) $A^{1/2} = \mathrm{diag}(1, 2)$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, de valeurs propres ± 2. Directement :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi_{AB} = X^2 - 4$$

— AB n'est pas symétrique, mais a bien ses valeurs propres réelles.

Réponse. $AB \sim A^{1/2}BA^{1/2}$ symétrique ; ici $\mathrm{Sp}(AB) = \{2, -2\}$.

Correction de l'exercice 9 – Superadditivité du déterminant

a) $A + B = A^{1/2}(I + C)A^{1/2}$.

b) En développant $\prod(1 + \mu_i)$, on obtient $1 + \prod \mu_i$ plus des termes positifs.

c) $\det(I + C) \geq 1 + \det C$ et $\det A \det C = \det B$, donc

$$\det(A + B) \geq \det A + \det B$$

— Exemple : $\det A = 1$, $\det B = 2$, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ de déterminant $8 \geq 3$ ✓.

Réponse. $\det(A + B) = \det A \prod(1 + \mu_i) \geq \det A + \det B$; ici $8 \geq 3$.

Correction de l'exercice 10 – Matrices de corrélation

a) J a pour valeurs propres 3 et 0 (double), donc C a $1 + 2a$ et $1 - a$ (double).

b) Positive : $1 + 2a \geq 0$ et $1 - a \geq 0$, soit

$$-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

— Définie positive : $-\frac{1}{2} < a < 1$.

c) Une matrice de corrélation est une matrice de covariance normalisée, donc positive. Pour $a = -0{,}6 < -\frac{1}{2}$, C a la valeur propre $1 - 1{,}2 = -0{,}2 < 0$: impossible. Le minimum possible d'une corrélation commune à trois variables est $-\frac{1}{2}$.

Réponse. Valeurs propres $1 + 2a$, $1 - a$; positive ssi $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$; corrélations communes $-0{,}6$ impossibles.

Correction de l'exercice 11 – Positivité stable par congruence

a) $x^{\mathsf{T}}P^{\mathsf{T}}SPx = (Px)^{\mathsf{T}}S(Px) \geq 0$.

b) Si $x \neq 0$, $Px \neq 0$ (rang p, donc P injective) et $(Px)^{\mathsf{T}}S(Px) > 0$.

c) La sous-matrice principale d'indices I est $P^{\mathsf{T}}SP$ avec P la matrice des e_i, $i \in I$ (rang $|I|$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Elle est définie positive, donc de déterminant > 0 :

$$\Delta_k = \det(s_{ij})_{1 \le i,j \le k} > 0$$

Réponse. $P^{\mathsf{T}}SP$ positive (définie si P injective) ; sous-matrices principales définies positives, mineurs > 0.

Correction de l'exercice 12 – Système linéaire et minimisation

a) Développement direct, en utilisant $x^{\mathsf{T}}Sh = h^{\mathsf{T}}Sx$ (symétrie).

b) Pour $x = x^* : J(x^* + h) = J(x^*) + \frac{1}{2}h^{\mathsf{T}}Sh > J(x^*)$ si $h \neq 0$. Et $J(x^*) = \frac{1}{2}x^{*\mathsf{T}}b - b^{\mathsf{T}}x^* = -\frac{1}{2}b^{\mathsf{T}}x^*$.

c) $S(1,1,1) = (1,0,1) = b$, donc $x^* = (1,1,1)$ et

$$\min J = -\frac{1}{2}(1+0+1) = -1$$

Réponse. Minimum unique en $x^* = S^{-1}b$, $J(x^*) = -\frac{1}{2}b^{\mathsf{T}}x^*$; ici $x^* = (1,1,1)$, $\min J = -1$.

Correction de l'exercice 13 – Topologie des positives

a) Pour x fixé, $S \mapsto x^{\mathsf{T}}Sx$ est linéaire continue ; S_n^+ est l'intersection des fermés $\{x^{\mathsf{T}}Sx \ge 0\}$.

b) Si $S, T \in S_n^+$ et $\lambda, \mu \ge 0$: $x^{\mathsf{T}}(\lambda S + \mu T)x \ge 0$.

c) Si $S \in S_n^{++}$ de plus petite valeur propre $\lambda_1 > 0$, alors pour $\|H\|_{\mathrm{op}} < \lambda_1$:

$$x^{\mathsf{T}}(S+H)x \ge (\lambda_1 - \|H\|)\|x\|^2 > 0$$

— donc S_n^{++} est ouvert. Si $S \in S_n^+$ a une valeur propre nulle, $S - \varepsilon I \notin S_n^+$: S n'est pas intérieur. Enfin $S + \varepsilon I \in S_n^{++}$ tend vers S.

Réponse. S_n^+ cône convexe fermé ; S_n^{++} est son intérieur, dense dans S_n^+.

Correction de l'exercice 14 – Somme de carrés par réduction de Gauss

a) $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b) $q = (x+y)^2 + y^2 + 2yz + 3z^2 = (x+y)^2 + (y+z)^2 + 2z^2$.

c) Trois carrés de formes linéaires indépendantes avec des coefficients > 0 : $q(x) \ge 0$, nul seulement si $x + y = y + z = z = 0$, soit $x = 0$. Les formes $(x+y)$, $(y+z)$, $\sqrt{2}z$ sont les lignes de L^{T} :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad S = LL^{\mathsf{T}}$$

Réponse. $q = (x+y)^2 + (y+z)^2 + 2z^2$; $S = LL^{\mathsf{T}}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la matrice du laplacien discret

a) Développement :
$x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ ✓. Nul seulement si $x_1 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3$, $x_3 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Mineurs : 2, 3, $\det S = 2 \times 3 - 2 = 4$, tous > 0.

c) $\ell_{11} = \sqrt{2}$, $\ell_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\ell_{22} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\ell_{32} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\ell_{33} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Contrôle :

$(\ell_{11}\ell_{22}\ell_{33})^2 = \left(\sqrt{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4$ ✓.

d) $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$, de produit

$$(2-\sqrt{2}) \times 2 \times (2+\sqrt{2}) = 2 \times (4-2) = 4 = \det S$$

Réponse. $x^{\mathsf{T}} S x$ somme de carrés ; mineurs $2, 3, 4$; valeurs propres $2-\sqrt{2}$, 2, $2+\sqrt{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).