Plaquette 5 – Applications : décomposition polaire, valeurs singulières, optimisation

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Le théorème spectral appliqué à $A^{\mathsf{T}}A$ (toujours symétrique positive) donne accès à **toute** matrice : ses **valeurs singulières** $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^{\mathsf{T}}A)}$ mesurent les étirements, la **décomposition polaire** $A = OS$ sépare une isométrie et un étirement symétrique, et la **décomposition en valeurs singulières** $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$ en découle. En optimisation, une matrice symétrique définie positive définit une fonction quadratique **strictement convexe**, dont le minimum se calcule par un système linéaire et dont les méthodes itératives convergent à une vitesse réglée par les valeurs propres extrêmes.

Exercice 1 – Décomposition polaire d'une matrice symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A en base orthonormée et calculer $S = \sqrt{A^{\mathsf{T}}A} = \sqrt{A^2}$.

b) En déduire $O = AS^{-1}$ et vérifier qu'elle est orthogonale.

c) Interpréter S et O à l'aide des projecteurs spectraux $p_{\pm}$ de A.

Exercice 2 – Existence et unicité de la décomposition polaire

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^{\mathsf{T}}A \in S_n^{++}$ et poser $S = \sqrt{A^{\mathsf{T}}A}$.

b) Montrer que $O = AS^{-1}$ est orthogonale.

c) Montrer l'unicité : si $A = O'S'$ avec $O' \in O(n)$ et $S' \in S_n^{++}$, calculer $A^{\mathsf{T}}A$ et conclure.

Exercice 3 – Valeurs singulières et norme

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^{\mathsf{T}}A$ et les valeurs singulières de A.

b) Donner $\|A\|_{\mathrm{op}}$ et comparer avec le rayon spectral de A.

c) Écrire la décomposition polaire de A et l'interpréter géométriquement.

Exercice 4 – Décomposition en valeurs singulières d'une matrice de rang 1

Soit $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ non nuls et $A = uv^{\mathsf{T}}$.

a) Calculer $A^{\mathsf{T}}A$ et en déduire les valeurs singulières de A.

b) Écrire une SVD de A.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Solution de norme minimale

On considère l'équation $x + y + z = 3$ dans $\mathbb{R}^3$, soit $Ax = b$ avec $A = (1\ 1\ 1)$.

a) Montrer que l'ensemble des solutions est un plan affine de direction $\ker A$.

b) Montrer que la solution de norme minimale est orthogonale à $\ker A$, donc dans $\mathrm{Im} A^{\mathsf{T}}$, et la calculer.

c) Vérifier la formule $x^* = A^{\mathsf{T}}(AA^{\mathsf{T}})^{-1}b$.

Exercice 6 – Tenseur d'inertie et axes principaux

Deux masses unité sont placées en $r_1 = (1, 1, 0)$ et $r_2 = (-1, -1, 0)$. Le tenseur d'inertie est $I = \sum_k m_k \left(\|r_k\|^2 I_3 - r_k r_k^{\mathsf{T}} \right)$.

a) Calculer I.

b) Déterminer ses axes principaux (vecteurs propres) et moments principaux.

c) Interpréter le moment nul.

Exercice 7 – Variance minimale d'une combinaison

Un vecteur aléatoire X a pour matrice de covariance $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $V(a^{\mathsf{T}}X) = a^{\mathsf{T}}Ca$.

b) Déterminer le minimum de $V(a^{\mathsf{T}}X)$ pour $\|a\| = 1$, et la direction a correspondante.

c) Même question sous la contrainte $a_1 + a_2 = 1$ (portefeuille de variance minimale).

Exercice 8 – Convexité d'une fonction quadratique

Soit S symétrique et $f(x) = x^{\mathsf{T}}Sx$.

a) Montrer que $f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) - t(1-t)f(x-y)$.

b) En déduire que f est convexe si et seulement si $S \in S_n^+$, strictement convexe si et seulement si $S \in S_n^{++}$.

c) Étudier $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$.

Exercice 9 – Descente de gradient

Soit $S = \mathrm{diag}(1, 3)$, $b \in \mathbb{R}^2$, $J(x) = \frac{1}{2}x^{\mathsf{T}}Sx - b^{\mathsf{T}}x$ et $x_{k+1} = x_k - t(Sx_k - b)$.

a) Montrer que l'erreur $e_k = x_k - x^*$ vérifie $e_{k+1} = (I - tS)e_k$.

b) En déduire que la méthode converge pour tout x_0 si et seulement si $0 < t < \frac{2}{3}$.

c) Déterminer le pas t optimal et la vitesse de convergence correspondante.

Exercice 10 – Laplacien d'un graphe

Pour le graphe chemin $1 - 2 - 3$, on pose $L = D - A$ (degrés moins adjacence) :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que $x^{\mathsf{T}}Lx = (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2$. En déduire $L \in S_3^+$ et $\ker L$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Déterminer le spectre de L.

c) Interpréter la deuxième plus petite valeur propre (connexité algébrique).

Exercice 11 – Exponentielle et logarithme des définies positives

a) Montrer que si S est symétrique, $\exp(S) \in S_n^{++}$.

b) Montrer que exp réalise une bijection de S_n sur S_n^{++} (construire l'inverse par la décomposition spectrale).

c) Calculer $\log \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 – Meilleure approximation de rang 1

Soit $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$ avec $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$, en taille 2.

a) Montrer que $A_1 = \sigma_1 u_1 v_1^{\mathsf{T}}$ est de rang 1 et que $\|A - A_1\|_F = \sigma_2$.

b) Montrer que $\|A - A_1\|_{\mathrm{op}} = \sigma_2$.

c) Application : $A = \mathrm{diag}(3, 1)$. Quelle matrice de rang 1 approche le mieux A ?

Exercice 13 – Conditionnement

Pour A inversible, on pose $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ (norme subordonnée euclidienne).

a) Montrer que $\kappa(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

b) Si $Ax = b$ et $A(x + \delta x) = b + \delta b$, montrer que $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$.

c) Calculer κ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}01 \end{pmatrix}$ (on donne ses valeurs propres $\approx 2{,}005$ et $\approx 0{,}004988$).

Exercice 14 – Inégalité de Kantorovich en dimension 2

Soit $S = \mathrm{diag}(m, M)$ avec $0 < m \leq M$ et $x = (x_1, x_2)$ unitaire.

a) Montrer que $(x^{\mathsf{T}}Sx)(x^{\mathsf{T}}S^{-1}x) = (mx_1^2 + Mx_2^2)\left(\frac{x_1^2}{m} + \frac{x_2^2}{M}\right)$.

b) En posant $s = x_1^2 \in [0, 1]$, montrer que cette quantité vaut $1 + s(1 - s)\frac{(M - m)^2}{mM}$.

c) En déduire $1 \leq (x^{\mathsf{T}}Sx)(x^{\mathsf{T}}S^{-1}x) \leq \frac{(m + M)^2}{4mM}$.

Exercice 15 – Synthèse : SVD et décomposition polaire

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^{\mathsf{T}}A$, ses valeurs propres et vecteurs propres, et les valeurs singulières de A.

b) Déterminer $u_i = \frac{Av_i}{\sigma_i}$ et écrire $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$.

c) En déduire la décomposition polaire $A = OS$ avec $O = UV^{\mathsf{T}}$ et $S = V\Sigma V^{\mathsf{T}}$.

d) Vérifier $|\det A| = \sigma_1\sigma_2$ et donner $\|A\|$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).