Plaquette 1 – Diagonalisation orthogonale, formes quadratiques et matrices positives

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On diagonalise une matrice **symétrique réelle** en base orthonormée, on réduit une **forme quadratique**, on caractérise les matrices **positives** et **définies positives**, et on applique le théorème aux extremums et aux coniques.

Exercice 1 – Diagonalisation orthogonale

Diagonaliser en base orthonormée $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – Réduction d'une forme quadratique

Réduire $q(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ et donner sa signature.

Exercice 3 – Forme non définie

Déterminer la signature de $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$.

Exercice 4 – Critère de Sylvester

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle définie positive ?

Exercice 5 – Matrice de type M^T M

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $M^{\mathsf{T}}M$ est symétrique définie positive.

Exercice 6 – Quotient de Rayleigh

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer $\max_{\|x\| = 1} \langle Ax, x \rangle$ et $\min_{\|x\| = 1} \langle Ax, x \rangle$.

Exercice 7 – Racine carrée positive

Montrer que toute matrice symétrique positive A admet une **unique** racine carrée symétrique positive.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Extremums et hessienne

Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$. Déterminer ses points critiques et leur nature.

Exercice 9 – Conique

Identifier la conique d'équation $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 8$.

Exercice 10 – Endomorphisme antisymétrique

Soit u antisymétrique ($u^* = -u$) d'un espace euclidien. Montrer que $\langle u(x), x\rangle = 0$ et que les valeurs propres réelles de u sont nulles.

Exercice 11 – Trace et valeurs propres

Soit A symétrique réelle. Montrer que $\mathrm{tr}\left(A^2\right) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_k \lambda_k^2$.

Exercice 12 – Diagonalisation orthogonale de 3I - J

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3I - J$.

a) Déterminer le spectre de A à partir de celui de J.

b) Donner une base orthonormée de vecteurs propres.

c) Écrire $A = PDP^{\mathsf{T}}$ et en déduire que A est positive mais pas définie positive.

Exercice 13 – Positivité et signe des valeurs propres

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que S est positive ($X^{\mathsf{T}}SX \geq 0$ pour tout X) si et seulement si $\mathrm{Sp}S \subset \mathbb{R}_+$.

b) Énoncer le critère analogue pour S définie positive.

c) Étudier $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 – Matrices symétriques d'ordre fini

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $A^k = I$ pour un entier $k \geq 1$.

a) Montrer que les valeurs propres de A sont ± 1.

b) En déduire $A^2 = I$, puis que A est une symétrie orthogonale.

c) Montrer que si k est impair, $A = I$.

Exercice 15 – Synthèse : réduction complète

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A en base orthonormée.

b) En déduire la signature de $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xy + 4xz + 4yz$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).