Plaquette 2 – Diagonalisation orthogonale en pratique

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour diagonaliser une matrice symétrique réelle **en base orthonormée** : on calcule les valeurs propres (toutes réelles), on détermine chaque sous-espace propre, puis on choisit une base **orthonormée** dans chacun (Gram-Schmidt si la dimension est ≥ 2). Les sous-espaces propres de valeurs propres distinctes sont **automatiquement orthogonaux** : il n'y a rien à orthogonaliser entre eux. La matrice de passage P est orthogonale, donc $P^{-1} = P^{\mathsf{T}}$, ce qui évite tout calcul d'inverse. Contrôles : trace, déterminant, et $\sum \lambda_i^2 = \sum a_{ij}^2$.

Exercice 1 – Une matrice symétrique 2 × 2

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les valeurs propres de S.

b) Déterminer une matrice orthogonale P telle que $P^{\mathsf{T}}SP$ soit diagonale.

c) Vérifier $\sum \lambda_i^2 = \sum s_{ij}^2$.

Exercice 2 – Valeurs propres distinctes : orthogonalité automatique

Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $(1,2,1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-1,1)$ sont vecteurs propres et préciser les valeurs propres.

b) Vérifier qu'ils sont deux à deux orthogonaux, et l'expliquer.

c) Écrire P orthogonale et D.

Exercice 3 – Une valeur propre double : Gram-Schmidt dans l'espace propre

Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I$.

a) Déterminer le spectre de S.

b) Donner une base de E_{-1} puis une base orthonormée.

c) Écrire la décomposition spectrale $S = 5\,p_5 - p_{-1}$ avec p_5, p_{-1} projecteurs orthogonaux explicites.

Exercice 4 – Une famille paramétrée

Soit $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, a, b réels, $b \neq 0$.

a) Diagonaliser S en base orthonormée (la base ne dépend pas de a, b).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) À quelle condition S est-elle définie positive ?
c) Calculer S^n et $\exp(S)$.

Exercice 5 – Les symétriques complexes ne sont pas diagonalisables en général

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Vérifier que A est symétrique ($A^\top = A$) et calculer A^2.
b) En déduire que A n'est pas diagonalisable.
c) Quelle hypothèse du théorème spectral manque-t-il ? Quelle est la bonne généralisation aux matrices complexes ?

Exercice 6 – Coefficients diagonaux et valeurs propres extrêmes

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

a) Montrer que $\lambda_1 \leq s_{ii} \leq \lambda_n$ pour tout i.
b) Montrer plus généralement que $\lambda_1 \leq \frac{x^\top S x}{x^\top x} \leq \lambda_n$.
c) Application : montrer que $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ a une valeur propre ≤ 1 et une valeur propre ≥ 2, puis les calculer.

Exercice 7 – Norme de Frobenius et valeurs propres

Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres λ_i.

a) Montrer que $\mathrm{tr}(S^2) = \sum \lambda_i^2 = \sum_{i,j} s_{ij}^2$.
b) En déduire que si S a n valeurs propres de module ≤ 1, alors $\sum_{i,j} s_{ij}^2 \leq n$.
c) Montrer que S est nulle si et seulement si $\mathrm{tr}(S^2) = 0$. Le résultat est-il vrai pour une matrice non symétrique ?

Exercice 8 – Codiagonalisation de deux symétriques

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ qui commutent.

a) Montrer que chaque sous-espace propre de A est stable par B.
b) En déduire l'existence d'une base orthonormée qui diagonalise A et B.
c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vérifier $AB = BA$ et codiagonaliser.

Exercice 9 – Spectres de $A^\top A$ et $AA^\top$

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^\top A$ et $AA^\top$ sont symétriques positives.
b) Montrer qu'elles ont les mêmes valeurs propres non nulles, avec multiplicités (utiliser $X^p \chi_{AB} = X^n \chi_{BA}$, ou directement $A^\top A X = \lambda X \Rightarrow AA^\top(AX) = \lambda AX$).
c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Analyse en composantes principales

On considère les quatre points $(2,2)$, $(-2,-2)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ du plan, de moyenne nulle, et la matrice de covariance $C = \frac{1}{4}\sum_k x_k x_k^{\mathsf{T}}$.

a) Calculer C.

b) Diagonaliser C en base orthonormée.

c) Interpréter : dans quelle direction le nuage est-il le plus dispersé ? Quelle part de la variance totale cette direction explique-t-elle ?

Exercice 11 – Puissances et exponentielle d'une symétrique

Soit $S = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (valeurs propres 6 et 1, vecteurs $(2,1)$ et $(1,-2)$).

a) Écrire les projecteurs orthogonaux p_6 et p_1.

b) Calculer S^n et $\exp(tS)$.

c) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{S^n}{6^n}$.

Exercice 12 – Symétrique et orthogonale : diagonalisation

Soit $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que S est symétrique et orthogonale.

b) En déduire son spectre et ses sous-espaces propres.

c) Interpréter géométriquement.

Exercice 13 – Une matrice symétrique par blocs

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in S_{2n}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si $AX = \lambda X$, alors (X, X) et $(X, -X)$ sont vecteurs propres de M.

b) En déduire le spectre de M et une base orthonormée de vecteurs propres à partir de celle de A.

c) Application avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 – Endomorphisme symétrique de rang 2

Soit a, b deux vecteurs unitaires orthogonaux de $\mathbb{R}^n$ et $S = ab^{\mathsf{T}} + ba^{\mathsf{T}}$.

a) Montrer que S est symétrique de rang 2.

b) Calculer $S(a+b)$ et $S(a-b)$.

c) En déduire le spectre de S et sa décomposition spectrale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : étude complète d'une matrice symétrique

Soit $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 1, 3, 4 (vecteurs $(1,2,1)$, $(1,0,-1)$, $(1,-1,1)$).

a) Écrire la décomposition spectrale $S = \sum \lambda_i u_i u_i^{\mathsf{T}}$.

b) En déduire la racine carrée positive $\sqrt{S}$ (donner sa forme spectrale).

c) Déterminer le minimum et le maximum de $q(x) = x^{\mathsf{T}} S x$ sur la sphère unité, et les points où ils sont atteints.

d) Calculer $\det S$, $\operatorname{tr} S^{-1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).