# Plaquette 4 – Formes quadratiques, quotient de Rayleigh et principe du min-max

## Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

**Méthode**

Une forme quadratique $q(x) = x^{\mathsf{T}}Sx$ se **réduit** dans une base orthonormée propre de $S$ : $q = \sum \lambda_i y_i^2$. On en déduit son **signe**, sa **signature** (nombres de $\lambda_i > 0$ et $< 0$), la nature d'une **conique** ou d'une **quadrique** $q(x) = c$, et les **extremums** de $q$ sur la sphère unité (quotient de Rayleigh). Le principe du **min-max** de Courant-Fischer caractérise chaque valeur propre de façon variationnelle, ce qui permet de comparer les spectres de matrices voisines. Pour un calcul rapide de signature, la réduction de **Gauss** en carrés suffit (loi d'inertie de Sylvester).

### Exercice 1 – Extremums d'une forme quadratique sur le cercle

Soit $q(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$.

a) Écrire la matrice $S$ de $q$ et ses valeurs propres.

b) Déterminer le maximum et le minimum de $q$ sur le cercle unité, et les points où ils sont atteints.

c) Vérifier en un point.

### Exercice 2 – Maximum de xy + yz + zx sur la sphère

Soit $q(x, y, z) = xy + yz + zx$.

a) Écrire la matrice $S$ de $q$ et l'exprimer à l'aide de $J$.

b) En déduire le maximum et le minimum de $q$ sur la sphère unité.

c) Retrouver le maximum par l'identité $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2q$.

### Exercice 3 – Le principe du min-max

Soit $S$ symétrique, $(u_i)$ base orthonormée propre associée à $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$, et $R(x) = \dfrac{x^{\mathsf{T}}Sx}{x^{\mathsf{T}}x}$.

a) Montrer que sur $F_k = \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$, $\max R = \lambda_k$.

b) Soit $F$ de dimension $k$. Montrer que $F \cap \mathrm{Vect}(u_k, \ldots, u_n) \neq \{0\}$ et que $\max_F R \geq \lambda_k$.

c) En déduire $\lambda_k = \min_{\dim F = k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} R(x)$.

### Exercice 4 – Monotonie des valeurs propres (Weyl)

Soit $A$ symétrique et $B$ symétrique positive.

a) Montrer, à l'aide du min-max, que $\lambda_k(A + B) \geq \lambda_k(A)$ pour tout $k$.

b) Vérifier sur $A = \mathrm{diag}(1, 3)$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Établir l'encadrement $\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A + B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 5 – Nature d'une conique

Soit $C : 5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6$.

a) Réduire la forme quadratique en base orthonormée propre.

b) En déduire la nature de $C$, ses axes de symétrie et ses demi-axes.

c) Même question pour $x^2 + 4xy + y^2 = 3$.

### Exercice 6 – Nature d'une quadrique

Soit $Q : x^2 + 2yz = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

a) Écrire la matrice de la forme quadratique et ses valeurs propres.

b) Réduire l'équation en base orthonormée propre.

c) En déduire la nature de $Q$.

### Exercice 7 – Signature par la méthode de Gauss

a) Écrire $q_1(x, y) = xy$ comme différence de deux carrés, et donner sa signature.

b) Réduire $q_2(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz$ en carrés et donner sa signature.

c) Vérifier la signature de $q_2$ par le signe des valeurs propres (on pourra calculer det et tr de la matrice).

### Exercice 8 – Norme d'une matrice symétrique

Soit $S$ symétrique et $\|S\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Sx\|$.

a) Montrer que $\|S\| = \max |\lambda_i| = \rho(S)$.

b) Montrer que $\|S\| = \sup_{\|x\| = 1} |x^{\mathsf{T}} S x|$.

c) Application : $\|S\|$ pour $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

### Exercice 9 – Réduction simultanée de deux formes quadratiques

Soit $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$.

a) Montrer qu'il existe $P$ inversible telle que $P^{\mathsf{T}} A P = I$ et $P^{\mathsf{T}} B P$ diagonale (diagonaliser $A^{-1/2} B A^{-1/2}$).

b) Montrer que les coefficients diagonaux de $P^{\mathsf{T}} B P$ sont les racines de $\det(B - \lambda A) = 0$.

c) Application : $A = \mathrm{diag}(1, 4)$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

### Exercice 10 – Extremum local par la hessienne

Soit $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$.

a) Déterminer le point critique de $f$.

b) Calculer la hessienne et conclure sur la nature du point critique.

c) Montrer que le minimum est global en écrivant $f$ comme forme quadratique en $(x - x_0, y - y_0)$ plus une constante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

### Exercice 11 – Point col

Soit $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$.

a) Montrer que $(0,0)$ est le seul point critique.

b) Calculer la hessienne et ses valeurs propres.

c) Montrer que $(0,0)$ n'est pas un extremum et préciser les directions de croissance et de décroissance.

### Exercice 12 – Maximum d'une forme linéaire sur un ellipsoïde

Soit $S \in S_n^{++}$ et $c \in \mathbb{R}^n$. On cherche $\max\{c^\top x \mid x^\top S x = 1\}$.

a) En posant $y = S^{1/2}x$, montrer que le maximum vaut $\sqrt{c^\top S^{-1} c}$.

b) Préciser le point où il est atteint.

c) Application : maximum de $x + y$ sur l'ellipse $x^2 + 4y^2 = 1$.

### Exercice 13 – Deuxième valeur propre par contrainte d'orthogonalité

Soit $S$ symétrique, $\lambda_n$ sa plus grande valeur propre et $u_n$ un vecteur propre unitaire associé.

a) Montrer que $\max\{R(x) \mid x \perp u_n,\ x \neq 0\} = \lambda_{n-1}$.

b) Application : $S = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, avec $u_3 = \dfrac{(1,-1,1)}{\sqrt{3}}$ (valeur propre 4).

c) Vérifier en un vecteur.

### Exercice 14 – Inertie et invariance de la signature

Soit $q$ une forme quadratique de matrice $S$ et $P$ inversible.

a) Montrer que $P^\top S P$ et $S$ ont le même nombre de valeurs propres $> 0$ (loi d'inertie de Sylvester), en caractérisant ce nombre comme la dimension maximale d'un sous-espace sur lequel $q$ est définie positive.

b) En déduire que la signature ne dépend pas de la réduction en carrés choisie.

c) Application : les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles congruentes ?

### Exercice 15 – Synthèse : un ellipsoïde de révolution

Soit $q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ et $E : q = 4$.

a) Montrer que la matrice de $q$ est $S = I + J$ et donner son spectre.

b) Réduire $q$ en base orthonormée.

c) En déduire la nature de $E$, son axe de révolution et ses demi-axes.

d) Déterminer les points de $E$ les plus proches et les plus éloignés de l'origine.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).