Plaquette 3 – Matrices symétriques positives et définies positives

Théorème spectral — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une matrice symétrique est **positive** (ou définie positive), on dispose de plusieurs voies : signe des valeurs propres, écriture comme matrice de **Gram** $M^{\mathsf{T}}M$ ou $(\langle v_i, v_j\rangle)$, **mineurs principaux dominants** (critère de Sylvester, pour le caractère défini), décomposition de **Cholesky** $S = LL^{\mathsf{T}}$, ou réduction de la forme quadratique en somme de carrés. Pour les inégalités (Hadamard, $\det(A+B)$, $\operatorname{tr}(AB) \geq 0$), le réflexe est de se ramener au cas où l'une des matrices vaut I grâce à la **racine carrée** $A^{1/2}$.

Exercice 1 – Critère de Sylvester avec un paramètre

Soit $S_a = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer les trois mineurs principaux dominants.

b) En déduire les valeurs de a pour lesquelles S_a est définie positive.

c) Pour $a = \frac{2}{3}$, montrer que S_a est positive mais pas définie, et trouver un vecteur du noyau.

Exercice 2 – Décomposition de Cholesky

Soit $S = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que S est définie positive.

b) Déterminer $L = \begin{pmatrix} \ell_{11} & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{pmatrix}$ à diagonale positive telle que $S = LL^{\mathsf{T}}$.

c) En déduire la résolution de $SX = (2, 3)$ par deux systèmes triangulaires.

Exercice 3 – Matrices de Gram

Soit $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs d'un espace euclidien et $G = (\langle v_i, v_j\rangle)$.

a) Montrer que G est symétrique positive.

b) Montrer que G est définie positive si et seulement si la famille est libre.

c) Réciproquement, montrer que toute $S \in S_n^+$ est une matrice de Gram (utiliser $S^{1/2}$).

Exercice 4 – La matrice de Hilbert

Soit $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

a) Montrer que $\frac{1}{i+j-1} = \int_0^1 t^{i-1} t^{j-1}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire que H_n est symétrique définie positive.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Calculer $\det H_2$ et vérifier le critère de Sylvester pour H_3 (sachant $\det H_3 = \frac{1}{2160}$).

Exercice 5 – Inégalité d'Hadamard

Soit $S \in S_n^{++}$ et $D = \mathrm{diag}(s_{11}, \dots, s_{nn})$.

a) Montrer que $s_{ii} > 0$ et que $T = D^{-1/2} S D^{-1/2}$ est définie positive à diagonale de 1.

b) En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique sur les valeurs propres de T, montrer que $\det T \leq 1$.

c) En déduire $\det S \leq \prod s_{ii}$ et vérifier sur $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 – Trace d'un produit de positives

Soit $A, B \in S_n^+$.

a) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(B^{1/2} A B^{1/2})$.

b) En déduire $\mathrm{tr}(AB) \geq 0$.

c) Montrer que $\mathrm{tr}(AB) = 0$ implique $AB = 0$.

Exercice 7 – Unicité de la racine carrée positive

Soit $S \in S_n^+$ et $R \in S_n^+$ telle que $R^2 = S$.

a) Montrer que R commute avec S, donc laisse stables les sous-espaces propres $E_\lambda(S)$.

b) Montrer que sur $E_\lambda(S)$, R induit un endomorphisme symétrique positif de carré $\lambda\,\mathrm{id}$, donc égal à $\sqrt{\lambda}\,\mathrm{id}$.

c) Conclure à l'unicité, et calculer $\sqrt{S}$ pour $S = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Le produit AB a des valeurs propres réelles

Soit $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $AB = A^{1/2}\left(A^{1/2} B A^{1/2}\right) A^{-1/2}$.

b) En déduire que AB est diagonalisable à valeurs propres réelles, et que si B est positive, ces valeurs propres sont positives.

c) Application : $A = \mathrm{diag}(1, 4)$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 – Superadditivité du déterminant

Soit $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^+$.

a) Montrer que $\det(A + B) = \det A \cdot \det(I + C)$ avec $C = A^{-1/2} B A^{-1/2} \in S_n^+$.

b) En notant $\mu_i \geq 0$ les valeurs propres de C, montrer que $\prod (1 + \mu_i) \geq 1 + \prod \mu_i$.

c) En déduire $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ et vérifier avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \mathrm{diag}(1, 2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Matrices de corrélation

Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$, a réel.

a) Déterminer les valeurs propres de C ($C = (1-a)I + aJ$).

b) En déduire les a pour lesquels C est positive, définie positive.

c) Interpréter : trois variables aléatoires peuvent-elles être deux à deux corrélées à $-0{,}6$?

Exercice 11 – Positivité stable par congruence

Soit $S \in S_n$ et $P \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $S \in S_n^+ \Rightarrow P^\mathsf{T} S P \in S_p^+$.

b) Montrer que si $S \in S_n^{++}$ et P est de rang p, alors $P^\mathsf{T} S P \in S_p^{++}$.

c) En déduire que toute sous-matrice principale d'une définie positive est définie positive, et retrouver le sens direct du critère de Sylvester.

Exercice 12 – Système linéaire et minimisation

Soit $S \in S_n^{++}$, $b \in \mathbb{R}^n$ et $J(x) = \frac{1}{2} x^\mathsf{T} S x - b^\mathsf{T} x$.

a) Montrer que $J(x+h) = J(x) + (Sx - b)^\mathsf{T} h + \frac{1}{2} h^\mathsf{T} S h$.

b) En déduire que J admet un unique minimum, atteint en $x^* = S^{-1} b$, et que $J(x^*) = -\frac{1}{2} b^\mathsf{T} x^*$.

c) Application : $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = (1, 0, 1)$.

Exercice 13 – Topologie des positives

a) Montrer que S_n^+ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$ (intersection de fermés $\{S \mid x^\mathsf{T} S x \geq 0\}$).

b) Montrer que S_n^+ est un cône convexe.

c) Montrer que S_n^{++} est l'intérieur de S_n^+, et que son adhérence est S_n^+ (considérer $S + \varepsilon I$).

Exercice 14 – Somme de carrés par réduction de Gauss

Soit $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz$.

a) Écrire la matrice S de q.

b) Réduire q en somme de carrés par la méthode de Gauss.

c) En déduire que S est définie positive et relier la réduction à la décomposition de Cholesky.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : la matrice du laplacien discret

Soit $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $x^{\mathsf{T}} S x = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$ et en déduire que $S \in S_3^{++}$.

b) Vérifier le critère de Sylvester.

c) Calculer la décomposition de Cholesky.

d) Donner les valeurs propres (on rappelle $2 - 2\cos\frac{k\pi}{4}$) et vérifier $\det S$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).