Plaquette 3 – Endomorphismes nilpotents

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés des nilpotents.

— u nilpotent $\Leftrightarrow \chi_u = X^n$ (sur $\mathbb{C}$) $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} u = \{0\} \Leftrightarrow u$ semblable à une triangulaire stricte.

— Indice $p \leq n$; $\ker u \subsetneq \ker u^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \ker u^p = E$.

— $\mathrm{id} - u$ inversible et $(\mathrm{id} - u)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$.

— Si u, v nilpotents **commutent**, $u + v$ et uv sont nilpotents.

— **Suite des rangs** $r_k = \mathrm{rg} u^k$ ($r_0 = n$) : nombre de blocs de taille $\geq k$

$$b_{\geq k} = r_{k-1} - r_k$$

— $\mathrm{tr}(u^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$; sur $\mathbb{C}$, c'est une caractérisation.

Correction de l'exercice 1 – L'indice de nilpotence est au plus n

a) Si $\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x) = 0$ avec des a_k non tous nuls, soit j le plus petit indice avec $a_j \neq 0$. On applique u^{p-1-j} : les termes $k > j$ donnent $u^{p-1-j+k}(x) = 0$ (exposant $\geq p$), il reste $a_j u^{p-1}(x) = 0$, d'où $a_j = 0$: contradiction.

b) Une famille libre a au plus n éléments : $p \leq n$, puis $u^n = u^p u^{n-p} = 0$.

c) Chaque vecteur est envoyé sur le précédent, le premier sur 0 :

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse. Famille libre de p vecteurs : $p \leq n$; si $p = n$, u a pour matrice $J_n(0)$.

Correction de l'exercice 2 – Caractérisations de la nilpotence

a) Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$, alors $0 = A^p X = \lambda^p X$, donc $\lambda = 0$. Et 0 est valeur propre car A n'est pas inversible ($\det(A)^p = 0$).

b) $\mathrm{Sp} A = \{0\}$ et χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$: $\chi_A = X^n$. Par Cayley-Hamilton,

$$A^n = \chi_A(A) = 0$$

c) Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour seule valeur propre réelle 0, mais $\chi_A = X(X^2+1)$ et A n'est pas nilpotente ($A^2 \neq 0$, $A^4 = \mathrm{diag}(0,1,1)$).

Réponse. Nilpotente $\Leftrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A = \{0\}$; faux avec le seul spectre réel.

Correction de l'exercice 3 – Somme et produit de nilpotents

a) Binôme (licite car $uv = vu$) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$(u+v)^{p+q-1} = \sum_{k=0}^{p+q-1} \binom{p+q-1}{k} u^k v^{p+q-1-k}$$

— dans chaque terme, $k \geq p$ ou $p+q-1-k \geq q$: tous sont nuls. Et $(uv)^p = u^p v^p = 0$.

b) $E_{12}^2 = E_{21}^2 = 0$, mais $E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour carré I : elle n'est pas nilpotente. Ici $E_{12}E_{21} = E_{11} \neq E_{22} = E_{21}E_{12}$.

c) La somme de deux nilpotents peut ne pas l'être : l'ensemble des nilpotents n'est pas stable par addition (c'est un « cône »).

Réponse. Commutation : $(u+v)^{p+q-1} = 0$, $(uv)^p = 0$; $E_{12} + E_{21}$ non nilpotente.

Correction de l'exercice 4 – Inverse de id - u

a) Télescopage : $(\mathrm{id} - u)\sum_{k=0}^{p-1} u^k = \mathrm{id} - u^p = \mathrm{id}$.

b) $\lambda\,\mathrm{id} + u = \lambda\left(\mathrm{id} - \left(-\frac{u}{\lambda}\right)\right)$ et $-\frac{u}{\lambda}$ est nilpotent.

c) $M = I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$. Donc

$$M^{-1} = I - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— Vérification : coefficient $(1,3)$ de MM^{-1} : $1 - 4 + 3 = 0$ ✓.

Réponse. $(\mathrm{id} - u)^{-1} = \sum_{k<p} u^k$; $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 – Noyau et image d'un nilpotent

a) Soit $p \geq 2$ l'indice et x avec $u^{p-1}(x) \neq 0$. Alors $y = u^{p-1}(x) = u(u^{p-2}(x)) \in \mathrm{Im}u$ et $u(y) = u^p(x) = 0$:

$$y \in \ker u \cap \mathrm{Im}u, \qquad y \neq 0$$

b) La somme n'est pas directe. Un nilpotent diagonalisable serait nul.

c) $u(u(x)) = 0$: $\mathrm{Im}u \subset \ker u$, d'où $\mathrm{rg}u \leq n - \mathrm{rg}u$. Pour $n = 4$, rang 2 atteint par $E_{12} + E_{34}$ (deux blocs $J_2(0)$), et alors $\mathrm{Im}u = \ker u$.

Réponse. $u^{p-1}(x) \in \ker u \cap \mathrm{Im}u$; $u^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{rg}u \leq \frac{n}{2}$, égalité avec deux blocs $J_2(0)$.

Correction de l'exercice 6 – Lire les blocs de Jordan sur les rangs

a) $\mathrm{rg}J_m(0)^k = m - k$ si $k \leq m$, 0 sinon : chaque bloc de taille m perd un rang par puissance tant que $k \leq m$. Pour une somme de blocs, $r_{k-1} - r_k$ compte les blocs qui perdent encore un rang à l'étape k, c'est-à-dire ceux de taille $\geq k$.

b) Blocs de taille ≥ 1 : $4 - 2 = 2$; ≥ 2 : $2 - 1 = 1$; ≥ 3 : $1 - 0 = 1$; ≥ 4 : 0. Donc un bloc de taille 3 et un de taille 1 :

$$N \sim J_3(0) \oplus J_1(0)$$

c) ≥ 1 : 2 ; ≥ 2 : 2 ; ≥ 3 : 0. Deux blocs de taille 2 : $N \sim J_2(0) \oplus J_2(0)$.

Réponse. $b_{\geq k} = r_{k-1} - r_k$; rangs $(2,1,0)$: $J_3 \oplus J_1$; rangs $(2,0)$: $J_2 \oplus J_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Classes de similitude de nilpotents

a) Une réduite de Jordan nilpotente correspond à une partition de n en tailles de blocs. Pour $n = 3$: 3, $2+1$, $1+1+1$, soit les représentants $J_3(0)$, $J_2(0) \oplus (0)$, 0_3.

b) Partitions de 4 : 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$, soit 5 classes.

c) Les rangs des trois représentants sont 2, 1, 0, distincts : le rang détermine la classe.

$$\operatorname{rg} J_3(0) = 2, \quad \operatorname{rg}(J_2(0) \oplus (0)) = 1, \quad \operatorname{rg} 0_3 = 0$$

— En dimension 4, ce n'est plus vrai : $J_3(0) \oplus (0)$ et $J_2(0) \oplus J_2(0)$ sont toutes deux de rang 2 (il faut aussi $\operatorname{rg} N^2$).

Réponse. 3 classes en taille 3 (rangs $2, 1, 0$) ; 5 en taille 4 ; le rang ne suffit plus en taille 4.

Correction de l'exercice 8 – Lemme de Jacobson

a) $C^k = C^{k-1}C = C^{k-1}(AB - BA)$.

b) Comme C^{k-1} commute avec A :

$$\operatorname{tr}(C^{k-1}AB) = \operatorname{tr}(AC^{k-1}B) = \operatorname{tr}(C^{k-1}BA)$$

— (la dernière égalité par $\operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX)$ avec $X = A$, $Y = C^{k-1}B$). Donc $\operatorname{tr}(C^k) = 0$.

c) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les valeurs propres non nulles distinctes de C, de multiplicités m_j, alors $\sum_j m_j \lambda_j^k = 0$ pour $k = 1, \dots, r$; le système de Vandermonde (inversible) impose $m_j = 0$. Ainsi $\operatorname{Sp} C = \{0\}$: C est nilpotente.

Réponse. $\operatorname{tr}(C^k) = 0$ pour tout $k \geq 1$, donc C est nilpotente.

Correction de l'exercice 9 – Déterminant et perturbation nilpotente

a) Deux matrices qui commutent sur $\mathbb{C}$ ont un vecteur propre commun, d'où (récurrence) une base de cotrigonalisation.

b) Dans cette base, N est triangulaire de diagonale nulle (nilpotente) et B triangulaire de diagonale (β_i) : $B + N$ est triangulaire de même diagonale. Donc

$$\det(B+N) = \prod \beta_i = \det B, \qquad \chi_{B+N} = \chi_B$$

c) $B = E_{12}$ et $N = E_{21}$ ne commutent pas ($E_{12}E_{21} = E_{11} \neq E_{22} = E_{21}E_{12}$). On a $\det B = 0$ mais $\det(B+N) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$: sans commutation, la conclusion tombe.

Réponse. $\det(B+N) = \det B$ si $BN = NB$; contre-exemple $E_{12} + E_{21}$.

Correction de l'exercice 10 – Exponentielle d'un nilpotent

a) $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = 0$. La série s'arrête :

$$\exp(N) = I + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\exp(N) - I = N + \frac{N^2}{2}$ est triangulaire stricte, donc nilpotente. L'inverse est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\exp(-N) = I - N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\exp(tN) = I + tN + \frac{t^2}{2}N^2$, de dérivée $N + tN^2 = N(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2)$ (car $N^3 = 0$) ✓.

Réponse. $\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\exp(N)^{-1} = \exp(-N)$.

Correction de l’exercice 11 – Nilpotents de rang 1

a) $N^2 = U(V^{\mathsf{T}}U)V^{\mathsf{T}} = \mathrm{tr}(N)N$. Si $\mathrm{tr}N = 0$, $N^2 = 0$. Si $\mathrm{tr}N \neq 0$, $N^k = (\mathrm{tr}N)^{k-1}N \neq 0$ pour tout k : pas nilpotente.

b) Une nilpotente de rang 1 vérifie $N^2 = 0$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$: un bloc de taille 2 et $n-2$ blocs de taille 1. Toutes sont semblables à $J_2(0) \oplus 0_{n-2}$.

c) $U = (1,1,1)$, $V = (1,1,-2)$ ($V^{\mathsf{T}}U = 0$) :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = 0$$

Réponse. Nilpotente $\Leftrightarrow \mathrm{tr}N = 0$, alors $N^2 = 0$; toutes semblables à $J_2(0) \oplus 0$.

Correction de l’exercice 12 – Nilpotents qui commutent avec une diagonale

a) Le coefficient (i,j) de $DN - ND$ vaut $(\lambda_i - \lambda_j)n_{ij} = 0$; pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ donne $n_{ij} = 0$.

b) N est diagonale et nilpotente : ses coefficients diagonaux vérifient $n_{ii}^p = 0$, donc

$$N = 0$$

c) Toute matrice commute avec λI : tout nilpotent convient. Par exemple $J_2(\lambda) = \lambda I + N$, avec $N = E_{12} \neq 0$, est la décomposition de Dunford d’une matrice non diagonalisable.

Réponse. $(\lambda_i - \lambda_j)n_{ij} = 0$: N diagonale nilpotente, donc nulle ; aucune contrainte si D est scalaire.

Correction de l’exercice 13 – Sous-espace de matrices nilpotentes

a) Stable par combinaisons linéaires, de base $(E_{ij})_{i<j}$, soit $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments ; une triangulaire stricte a $\chi = X^n$.

b) Une matrice symétrique réelle est diagonalisable (théorème spectral) ; nilpotente et diagonalisable, elle est nulle. Un élément de $V \cap S_n$ est symétrique et nilpotent, donc nul.

c) Avec $V \cap S_n = \{0\}$ (cas réel) :

$$\dim V + \dim S_n \leq n^2 \quad \Longrightarrow \quad \dim V \leq n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

— La borne est atteinte par T_n^+ (théorème de Gerstenhaber dans le cas réel).

Réponse. $\dim T_n^+ = \frac{n(n-1)}{2}$; un sous-espace de nilpotentes réelles évite S_n, donc $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Un nilpotent cyclique

a) Dans la base où u a pour matrice $J_n(0)$, u^k a pour matrice $J_n(0)^k$, de rang $n-k$: $\dim\ker u^k = k$.

b) Soit F stable de dimension d. L'induit u_F est nilpotent, d'indice $\leq d$, donc $u^d(F) = \{0\}$: $F \subset \ker u^d$. Comme $\dim\ker u^d = d$:

$$F = \ker u^d$$

c) Un stable par dimension $d \in \{0, \dots, n\}$: $n+1$ sous-espaces stables, emboîtés (comme pour la dérivation sur $\mathrm{K}_{n-1}[X]$).

Réponse. $\dim\ker u^k = k$; stables $= \ker u^d$; $n+1$ sous-espaces stables.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : deux nilpotentes de même rang

a) $N_1^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_1^3 = 0$; $N_2^2 = 0$. Les deux sont nilpotentes, d'indices 3 et 2.

b) N_1 : $L_3 = -L_1$ et $L_4 = L_1 - L_2$, avec L_1, L_2 libres : $\mathrm{rg} N_1 = 2$. Les lignes de N_1^2 sont proportionnelles à $(-1, 1, 0, 1)$: $\mathrm{rg} N_1^2 = 1$. N_2 : $L_3 = L_1$ et $L_1 = L_2 + L_4$, avec L_2, L_4 libres : $\mathrm{rg} N_2 = 2$.

c) Par la règle $b_{\geq k} = r_{k-1} - r_k$:

$$N_1 \sim J_3(0) \oplus J_1(0), \qquad N_2 \sim J_2(0) \oplus J_2(0)$$

— Même rang 2 mais indices différents (3 et 2) : elles ne sont **pas** semblables.

Réponse. $N_1^3 = 0$, $N_2^2 = 0$; rangs $(2, 1, 0)$ et $(2, 0)$; $J_3 \oplus J_1$ contre $J_2 \oplus J_2$: non semblables.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).