Plaquette 4 – Sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford en pratique

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Projecteurs spectraux par Bézout (deux valeurs propres) : si $\chi_A = (X-\lambda)^a(X-\mu)^b$ et

$$U(X-\lambda)^a + V(X-\mu)^b = 1$$

— alors $p_\mu = U(A)(A-\lambda I)^a$ projette sur N_μ parallèlement à N_λ, et $p_\lambda = I - p_\mu$.

— $D = \lambda p_\lambda + \mu p_\mu$ (diagonalisable), $N = A - D$ (nilpotente), $DN = ND$.

— **Unicité** : si $A = D' + N'$ avec les mêmes propriétés, alors $D' = D$ et $N' = N$.

— **Calculs** : $A^n = \sum_{j<p} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j$, $\exp(tA) = \exp(tD)\exp(tN)$, avec $\exp(tN) = \sum_{j<p} \frac{t^j N^j}{j!}$.

— A diagonalisable $\Leftrightarrow N = 0$; A nilpotente $\Leftrightarrow D = 0$.

Correction de l’exercice 1 – Dunford pour une valeur propre double en taille 2

a) $\mathrm{tr}A = 4$, $\det A = 3 + 1 = 4$: $\chi_A = (X-2)^2$.

b) Une seule valeur propre : $N_2 = \mathbb{R}^2$, $D = 2I$ et $N = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, avec $N^2 = 0$ (Cayley-Hamilton) et $DN = ND$ trivialement.

c) Binôme avec $N^2 = 0$:

$$A^n = 2^n I + n2^{n-1}N, \qquad \exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}(I + tN) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}$$

Réponse. $D = 2I$, $N = A - 2I$; $A^n = 2^n I + n2^{n-1}N$; $\exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}(I + tN)$.

Correction de l’exercice 2 – Projecteurs spectraux par Bézout

a) En $X = 3$: $4a = 1$, $a = \frac{1}{4}$. Puis $1 - \frac{(X-1)^2}{4} = -\frac{(X-3)(X+1)}{4}$, d’où $bX + c = -\frac{X+1}{4}$.

b) $(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, donc

$$p_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— p_3 projette sur $N_3 = \mathbb{R}(0,1,1)$, p_1 sur $N_1 = \ker(A-I)^2$.

c) $D = I + 2p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie $N^2 = 0$ (rang 1, trace nulle) et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$DN = ND$ (calcul direct, ou parce que D et N sont des polynômes en A).

Réponse. $p_3 = \frac{1}{4}(A-I)^2$; $D = I + 2p_3$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Le piège de la matrice triangulaire

a) $S = E_{12} + E_{13}$. $\Delta S = E_{12} + E_{13}$ (multiplication des lignes par 1) et $S\Delta = E_{12} + 2E_{13}$ (la colonne 3 est multipliée par 2) : différents.

b) $(X-1)^2 - X(X-2) = X^2 - 2X + 1 - X^2 + 2X = 1$. Le facteur $(X-1)^2$ s'annule sur N_1, donc $p_2 = (T-I)^2$:

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $D = p_1 + 2p_2 = I + p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = T - D = E_{12}$. On vérifie $DE_{12} = E_{12} = E_{12}D$ et $E_{12}^2 = 0$.

Réponse. $\Delta S \neq S\Delta$; $p_2 = (T-I)^2$; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $N = E_{12}$.

Correction de l'exercice 4 – Unicité de la décomposition de Dunford

a) $D'A = D'(D'+N') = (D'+N')D' = AD'$, de même pour N'. Comme D et N sont des polynômes en A, ils commutent avec D' et N'.

b) D et D' sont diagonalisables et commutent : ils sont codiagonalisables, donc $D - D'$ est diagonalisable. N et N' sont nilpotents et commutent : $N' - N$ est nilpotent (binôme).

c) $D - D' = N' - N$ est à la fois diagonalisable et nilpotent, donc nul :

$$D' = D, \qquad N' = N$$

Réponse. $D - D' = N' - N$ diagonalisable et nilpotent, donc nul.

Correction de l'exercice 5 – Puissances par Dunford

a) $N = (A-I)p_1$ (sur N_3, A et D coïncident), et $p_1 p_3 = 0$, $p_1^2 = p_1$: $Np_1 = N$ et $Np_3 = 0$ (les projecteurs commutent avec A).

b) $D^n = p_1 + 3^n p_3$, et le binôme ($N^2 = 0$) donne $A^n = D^n + nD^{n-1}N$. Or $D^{n-1}N = (p_1 + 3^{n-1}p_3)N = N$. Donc

$$A^n = p_1 + 3^n p_3 + nN$$

c) $n = 1$: $p_1 + 3p_3 + N = D + N = A$ ✓. Coefficient $(2,3)$: $(p_1)_{23} + 3^n (p_3)_{23} + nN_{23} = -1 + 3^n + 0 = 3^n - 1$ (pour $n = 1$: $2 = a_{23}$ ✓).

Réponse. $A^n = p_1 + 3^n p_3 + nN$; coefficient $(2,3)$: $3^n - 1$.

Correction de l'exercice 6 – Exponentielle par Dunford

a) tD et tN commutent : l'exponentielle d'une somme de matrices qui commutent est le produit des exponentielles.

b) $\exp(tD) = \mathrm{e}^t p_1 + \mathrm{e}^{3t} p_3$ et $\exp(tN) = I + tN$. Le produit vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^t p_1 + \mathrm{e}^t p_1 tN + \mathrm{e}^{3t} p_3 + \mathrm{e}^{3t} t p_3 N$$

— et $p_1 N = N$, $p_3 N = 0$, d'où le résultat.

c) $X_0 = (1,0,1)$ vérifie $p_1 X_0 = X_0$ ($X_0 \in N_1$), $p_3 X_0 = 0$ et $NX_0 = (A - I)X_0 = 0$. Donc $X(t) = \mathrm{e}^t X_0$: la solution reste sur la droite propre.

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^t(p_1 + tN) + \mathrm{e}^{3t} p_3$; $X(t) = \mathrm{e}^t(1,0,1)$.

Correction de l'exercice 7 – Dunford et similitude

a) PDP^{-1} est diagonalisable, PNP^{-1} nilpotente, elles commutent et ont pour somme PAP^{-1}. Par unicité, c'est la décomposition de Dunford.

b) Les projecteurs spectraux sont des polynômes en A à coefficients réels (Bézout dans $\mathbb{R}[X]$, les valeurs propres étant réelles), donc $D = \sum \lambda p_\lambda$ est réelle, et $N = A - D$ aussi.

c) Conséquence de a). Réciproque fausse : I_2 et $J_2(1)$ ont la même partie diagonalisable $D = I_2$, mais

$$N(I_2) = 0 \neq E_{12} = N(J_2(1))$$

— et elles ne sont pas semblables.

Réponse. Dunford commute à la similitude ; parties réelles si χ_A scindé sur $\mathbb{R}$; réciproque fausse (I_2 et $J_2(1)$).

Correction de l'exercice 8 – Dimension des sous-espaces caractéristiques

a) N_λ est un noyau d'un polynôme en u : stable. $(u_\lambda - \lambda\,\mathrm{id})^m = 0$, donc $u_\lambda - \lambda\,\mathrm{id}$ est nilpotent et $\mathrm{Sp} u_\lambda = \{\lambda\}$.

b) $\chi_u = \prod_\mu \chi_{u_\mu}$ (matrice diagonale par blocs) et $\chi_{u_\mu} = (X - \mu)^{\dim N_\mu}$. En identifiant l'exposant de $(X - \lambda)$:

$$\dim N_\lambda = m$$

c) Sur N_λ, $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est nilpotent d'indice $q \leq \dim N_\lambda = m$; sur les autres N_μ, il est inversible. Donc $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id})^k = \ker(u_\lambda - \lambda\,\mathrm{id})^k$, qui vaut N_λ dès $k \geq q$.

Réponse. $\dim N_\lambda = m_\lambda$; stationnement à l'indice $q \leq m_\lambda$.

Correction de l'exercice 9 – Diagonalisable ou nilpotente : lecture sur Dunford

a) Si A est diagonalisable, $A = A + 0$ convient ; par unicité, $N = 0$. Si A est nilpotente, $A = 0 + A$ convient, donc $D = 0$. Les réciproques sont immédiates.

b) D et N commutent et N est nilpotente : $\chi_{D+N} = \chi_D$ (cotrigonalisation, la diagonale de N étant nulle).

c) A nilpotente : $D = 0$, $N = A$. B a deux valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable : $D = B$, $N = 0$. C :

$$D = 2I, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Réponse. $N = 0 \Leftrightarrow$ diagonalisable ; $D = 0 \Leftrightarrow$ nilpotente ; $\chi_A = \chi_D$.

Correction de l'exercice 10 – Système différentiel non diagonalisable

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X-2)^2$, $D = 2I$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}(I + tN)$.

c) $(x, y) = \mathrm{e}^{2t}(I + tN)(1, 0) = \mathrm{e}^{2t}(1 + t, -t)$:

$$x(t) = (1 + t)\mathrm{e}^{2t}, \qquad y(t) = -t\,\mathrm{e}^{2t}$$

— Vérification : $x' = (3 + 2t)\mathrm{e}^{2t}$ et $3x + y = (3 + 3t - t)\mathrm{e}^{2t}$ ✓ ; $y' = (-1 - 2t)\mathrm{e}^{2t}$ et $-x + y = (-1 - t - t)\mathrm{e}^{2t}$ ✓. Le facteur t vient de la partie nilpotente.

Réponse. $x = (1 + t)\mathrm{e}^{2t}$, $y = -t\,\mathrm{e}^{2t}$.

Correction de l’exercice 11 – Récurrence à racine double

a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $\chi_C = (X - 2)^2$, $D = 2I$, $N = C - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$.

b) $C^n = 2^n I + n2^{n-1}N$: chaque coordonnée de $U_n = C^n U_0$ est de la forme $(a + bn)2^n$.

c) $u_0 = a = 1$ et $u_1 = 2(a + b) = 4$, donc $b = 1$:

$$u_n = (n + 1)2^n$$

— Vérification : $u_2 = 4 \times 4 - 4 \times 1 = 12$ et $(2 + 1) \times 4 = 12$ ✓.

Réponse. $u_n = (n + 1)2^n$.

Correction de l’exercice 12 – Convergence vers 0 sans diagonalisabilité

a) $D = \frac{1}{2}I$, $N = E_{12}$, $N^2 = 0$: $A^n = \frac{1}{2^n}I + \frac{n}{2^{n-1}}N = \begin{pmatrix} 2^{-n} & n2^{1-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix}$.

b) $n2^{1-n} \to 0$ (croissances comparées), donc $A^n \to 0$. La norme $\|A\|_\infty = \frac{1}{2} + 1$ est > 1 : c’est le rayon spectral, et non la norme, qui gouverne la convergence.

c) Par Dunford, $A^n = \sum_{j<p} \binom{n}{j} D^{n-j}N^j$; chaque terme est un produit d’un polynôme en n par des λ^{n-j} avec $|\lambda| < 1$:

$$\binom{n}{j}|\lambda|^{n-j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & n2^{1-n} \\ 0 & 2^{-n} \end{pmatrix} \to 0$; $\rho(A) < 1 \Rightarrow A^n \to 0$.

Correction de l’exercice 13 – Partie diagonalisable comme polynôme en A

a) $D_A = 2I$, polynôme constant.

b) $D_B = p_1 + 2p_2 = I + (B - I)^2 = B^2 - 2B + 2I$:

$$D_B = B^2 - 2B + 2I$$

— Vérification : $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, donc $B^2 - 2B + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, comme dans l’exercice sur le piège de la matrice triangulaire.

c) Un polynôme en une matrice commute toujours avec elle.

Réponse. $D_A = 2I$; $D_B = B^2 - 2B + 2I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Exponentielle d’une matrice non diagonalisable de taille 3

a) $\exp(tJ) = \mathrm{e}^{\lambda t}\left(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2\right) = \mathrm{e}^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $X(t) = \exp(tJ)X(0)$: la troisième coordonnée est $c\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, la deuxième $(b + ct)\mathrm{e}^{\lambda t}$, la première $(a + bt + c\frac{t^2}{2})\mathrm{e}^{\lambda t}$.

c) La matrice compagnon de $(X-1)^3$ est semblable à $J_3(1)$ (une compagnon a $\pi = \chi$, donc un seul bloc). Les solutions sont donc

$$y(t) = (\alpha + \beta t + \gamma t^2)\,\mathrm{e}^{t}$$

Réponse. $\exp(tJ) = \mathrm{e}^{\lambda t}(I + tN + \frac{t^2}{2}N^2)$; $y = (\alpha + \beta t + \gamma t^2)\mathrm{e}^{t}$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : Dunford complet d’une matrice 3 × 3

a) $\frac{1}{4}\Big[(X+1)^2 - (X+3)(X-1)\Big] = \frac{1}{4}\Big[X^2 + 2X + 1 - X^2 - 2X + 3\Big] = 1$. Le terme $\frac{1}{4}(A+I)^2$ s’annule sur N_{-1} et vaut l’identité sur N_1 : c’est p_1.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad p_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $D = 2p_1 - I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, de rang 1 et de trace nulle : $N^2 = 0$.

c) Comme dans l’exercice sur les puissances ($Np_{-1} = N$, $Np_1 = 0$) : $A^n = D^n + nD^{n-1}N$ avec $D^n = (-1)^n p_{-1} + p_1$ et $D^{n-1}N = (-1)^{n-1}N$. Pour $n = 2$:

$p_{-1} - 2N + p_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, égal à A^2 calculé directement ✓.

d) $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}(p_{-1} + tN) + \mathrm{e}^{t}p_1$.

Réponse. $D = 2p_1 - I$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $A^n = (-1)^n p_{-1} + n(-1)^{n-1}N + p_1$; $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}(p_{-1} + tN) + \mathrm{e}^{t}p_1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).