Plaquette 1 – Trigonalisation, sous-espaces caractéristiques et décomposition de Dunford

Trigonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Trigonalisation.

— u est **trigonalisable** $\Leftrightarrow$ χ_u est **scindé** sur K.

— Sur $\mathbb{C}$, **toute** matrice est trigonalisable (d'Alembert-Gauss).

— Dans une base de trigonalisation, les coefficients diagonaux sont les **valeurs propres** répétées selon leur multiplicité **algébrique**.

— Conséquences immédiates : $\mathrm{tr}(u) = \sum m_\lambda \lambda$ et $\det(u) = \prod \lambda^{m_\lambda}$.

Sous-espaces caractéristiques. Pour λ de multiplicité m_λ :

$$N_\lambda = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})^{m_\lambda}, \qquad \dim N_\lambda = m_\lambda$$

— Si χ_u est scindé : $E = \bigoplus_\lambda N_\lambda$ (lemme des noyaux appliqué à χ_u).

— $E_\lambda \subset N_\lambda$, avec égalité **si et seulement si** u est diagonalisable sur ce sous-espace.

Décomposition de Dunford. Si χ_u est scindé, il existe un **unique** couple (d, n) avec

$$u = d + n, \qquad d \text{ diagonalisable}, \quad n \text{ nilpotent}, \quad d \circ n = n \circ d$$

— d et n sont des **polynômes en** u.

— **Puissances** : la commutation permet le binôme,

$$u^k = \sum_{j=0}^{\min(k,\,p-1)} \binom{k}{j} d^{k-j} n^j$$

où p est l'indice de nilpotence de n — la somme est **finie**.

— **Exponentielle** : $\exp(u) = \exp(d)\exp(n)$, et $\exp(n)$ est un **polynôme** (somme finie).

Réduction de Jordan. Sur $\mathbb{C}$, toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs $J_{\lambda,k}$, chaque bloc étant $\lambda I_k + N_k$ avec N_k nilpotente de sur-diagonale de 1.

Correction de l'exercice 1 – Trigonalisabilité

— **Polynôme caractéristique** : $\chi_A = X^2 + 1$.

— **Sur** $\mathbb{R}$: $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle, il n'est **pas scindé**. A n'est donc **ni trigonalisable ni diagonalisable** sur $\mathbb{R}$.

— **Sur** $\mathbb{C}$: $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$ est scindé **à racines simples** — A est même **diagonalisable** sur $\mathbb{C}$, semblable à $\mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i})$.

— **Interprétation géométrique** : A est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$; aucun vecteur réel non nul n'est envoyé sur un multiple de lui-même, d'où l'absence de valeur propre réelle.

— **Règle** : sur $\mathbb{C}$, la question de la **trigonalisabilité** ne se pose jamais — elle est toujours acquise.

Réponse. Non sur $\mathbb{R}$; oui (et même diagonalisable) sur $\mathbb{C}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Trigonaliser une matrice 2x2

— **Spectre** : $\mathrm{tr}(A) = 4$, $\det A = 3 + 1 = 4$, donc $\chi_A = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$.

— **Sous-espace propre** : $(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, de rang 1, donc $d_2 = 1 < 2$: **non diagonalisable**, mais **trigonalisable** (χ_A scindé).

— **Premier vecteur** : $e_1 = (1, -1)$ engendre E_2.

— **Second vecteur** : on cherche e_2 tel que $Ae_2 = 2e_2 + e_1$, soit $(A - 2I)e_2 = e_1$.

— Le système $x + y = 1$ convient avec $e_2 = (1, 0)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $Ae_2 = (3, -1) = 2(1, 0) + (1, -1) = 2e_2 + e_1$ ✓

— C'est la **forme de Jordan** de A.

Réponse. $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Sous-espace caractéristique

— $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$, donc $m_2 = 2$.

— **Sous-espace propre** : $(A - 2I)X = 0$ donne $y = 0$ et $z = 0$, donc $E_2 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0))$, de dimension 1.

— **Sous-espace caractéristique** : $(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Son noyau est $\{z = 0\}$, donc $N_2 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$, de dimension $2 = m_2$ ✓

— **Décomposition** : $\mathbb{R}^3 = N_2 \oplus N_3$ avec $N_3 = E_3 = \mathrm{Vect}(0, 0, 1)$.

— **Lecture** : $E_2 \subsetneq N_2$ — c'est exactement le défaut de diagonalisabilité. Le sous-espace caractéristique « rattrape » la multiplicité manquante.

Réponse. E_2 de dimension 1, N_2 de dimension $2 = m_2$.

Correction de l'exercice 4 – Décomposition de Dunford

— On pose $D = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

— **Vérifications** : D est diagonale donc diagonalisable ; $N^2 = 0$ donc N est nilpotente ; $DN = ND$ car D est **scalaire** ✓

— **Décomposition** : $A = D + N$, et elle est **unique**.

— **Puissances** : le binôme s'applique (commutation) et $N^k = 0$ pour $k \geq 2$:

$$A^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

— **Contrôle pour** $n = 3$: $\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, et le produit direct donne

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$ ✓

— **Exponentielle** : $\exp(A) = \mathrm{e}^2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $A = 2I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5 – Nilpotence et trace

— **Spectre** : N est nilpotente, donc $\chi_N = X^n$ et sa seule valeur propre est 0.
— Sur $\mathbb{C}$, N est **trigonalisable** : elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale **nulle**.
— Le produit de telles matrices reste triangulaire supérieure à diagonale nulle, donc N^k aussi.
— **Trace** : la trace étant invariante par similitude et égale à la somme des coefficients diagonaux, $\mathrm{tr}\left(N^k\right) = 0$.
— **Réciproque** (vraie en caractéristique nulle) : si $\mathrm{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour $k = 1, \ldots, n$, alors A est nilpotente.
— **Application** : une matrice nilpotente a toujours trace, déterminant et polynôme caractéristique « triviaux » — ce sont les invariants classiques qui ne la distinguent pas de 0.

Réponse. N est semblable à une triangulaire de diagonale nulle, donc N^k aussi.

Correction de l'exercice 6 – Trigonalisation 3x3

— **Spectre** : $\chi_A = (X-1)^3$, valeur propre unique 1, $m_1 = 3$.
— **Sous-espace propre** : $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 2, donc $d_1 = 1 < 3$: **non diagonalisable**.
— **Nilpotence** : $N = A - I$ vérifie

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = 0$$

— L'**indice** est donc 3 — le maximum possible en dimension 3.
— **Dunford** : $A = I + N$, déjà sous forme $D + N$ (l'identité est diagonalisable et commute avec tout).
— **Puissances** : $A^k = I + kN + \binom{k}{2} N^2$, soit

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Contrôle pour** $k = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce que confirme le produit direct ✓

Réponse. Non diagonalisable ; $N = A - I$ est nilpotente d'indice 3.

Correction de l'exercice 7 – Matrices semblables

— Elles ont **même polynôme caractéristique** $(X-1)^2$, même trace (2) et même déterminant (1).
— Pourtant, si elles étaient semblables, on aurait $A = PIP^{-1} = I$, ce qui est faux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : elles ne sont **pas semblables**.
— **Où est la différence ?** Les **dimensions propres** : $d_1 = 1$ pour la première, $d_1 = 2$ pour la seconde. Le **polynôme minimal** les sépare également : $(X-1)^2$ contre $X-1$.
— **Leçon** : χ, trace et déterminant ne suffisent **pas** à caractériser la classe de similitude. Il faut la structure de Jordan (ou, en dimension ≤ 3, le couple (χ, π)).

Réponse. Non : seule l'identité est semblable à l'identité.

Correction de l'exercice 8 – Puissances via Dunford

— **Dunford** : $A = 3I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$, et les deux commutent.
— **Binôme** :

$$A^n = 3^n I + n3^{n-1}N = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

— **Normalisation** : $\dfrac{A^n}{3^n} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
— Le coefficient hors diagonale $\dfrac{n}{3}$ **diverge** : la limite n'existe pas.
— **Interprétation** : la partie nilpotente induit une croissance **polynomiale** qui se superpose à la croissance géométrique. Pour une matrice diagonalisable, $\dfrac{A^n}{\lambda_{\max}^n}$ converge toujours ; ici non.
— **Conséquence pratique** : dans les systèmes dynamiques, un bloc de Jordan non trivial produit des termes en $n\lambda^n$ — d'où les « résonances » en équations différentielles.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$; pas de limite après normalisation.

Correction de l'exercice 9 – Exponentielle de matrice

— **Dunford** : $tA = 2tI + tN$, avec $(tN)^2 = 0$ et commutation.
— **Propriété** : si B et C commutent, $\exp(B+C) = \exp(B)\exp(C)$.
— $\exp(2tI) = \mathrm{e}^{2t} I$ et $\exp(tN) = I + tN$ (la série s'arrête).

$$\exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : en $t = 0$ on obtient I ✓ ; et $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} & (1+2t)\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & 2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} = A\exp(tA)$ ✓
— **Application** : la solution de $X' = AX$, $X(0) = X_0$ est $X(t) = \exp(tA)X_0$ — on y lit les termes en $t\mathrm{e}^{2t}$, signature du bloc de Jordan.

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 – Trace et valeurs propres complexes

Notons $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres complexes (avec multiplicité) et $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ leurs fonctions symétriques.

— $\sigma_1 = \mathrm{tr}(A) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\mathrm{tr}\left(A^2\right) = \sum \lambda_i^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$ (la trace de A^2 est la somme des carrés des valeurs propres, par trigonalisation).
— Donc $5 = 1 - 2\sigma_2$, soit $\sigma_2 = -2$.
— $\sigma_3 = \det A = -2$.
— **Polynôme caractéristique** :

$$\chi_A = X^3 - \sigma_1 X^2 + \sigma_2 X - \sigma_3 = X^3 - X^2 - 2X + 2$$

— **Factorisation** : $X^3 - X^2 - 2X + 2 = X^2(X-1) - 2(X-1) = (X-1)\left(X^2 - 2\right)$.
— **Valeurs propres** : $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ — toutes **réelles et distinctes**, donc A est en fait diagonalisable.
— **Contrôle** : somme $= 1$ ✓, produit $= 1 \times \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) = -2$ ✓, somme des carrés $= 1 + 2 + 2 = 5$ ✓

Réponse. $\chi_A = (X-1)\left(X^2 - 2\right)$.

Correction de l'exercice 11 – Trigonalisation et sous-espaces stables

Existence d'une droite stable.

— χ_u est un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes : d'après **d'Alembert-Gauss**, il admet une racine λ.
— λ est donc valeur propre, et tout vecteur propre e_1 associé engendre une **droite stable** $\mathbb{C}e_1$.

Récurrence sur n.

— $n = 1$: toute matrice 1×1 est triangulaire.
— **Hérédité** : on complète e_1 en une base ; dans celle-ci,

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

— B est de taille $n-1$: par hypothèse de récurrence, elle est semblable à une triangulaire T'.
— En composant les changements de base, u est semblable à une matrice **triangulaire supérieure**.
— **Portée** : ce résultat est la clé de nombreuses démonstrations (Cayley-Hamilton, propriétés de la trace, décomposition de Dunford).

Réponse. Une racine de χ_u donne une droite stable ; récurrence sur la dimension.

Correction de l'exercice 12 – Spectre d'un polynôme en A par trigonalisation

a) $A = QTQ^{-1}$ avec T triangulaire de diagonale (λ_i). Les puissances de T sont triangulaires de diagonale (λ_i^k), donc $P(T)$ est triangulaire de diagonale $(P(\lambda_i))$:

$$\chi_{P(A)} = \chi_{P(T)} = \prod_{i=1}^{n} (X - P(\lambda_i))$$

b) Trace et déterminant se lisent sur la diagonale de $P(T)$: avec $P = X^k$, $\mathrm{tr}(A^k) = \sum \lambda_i^k$; et $\det P(A) = \prod P(\lambda_i)$.

c) $\mathrm{tr}(A^2) = 1 + i^2 + (-i)^2 = -1$; $\mathrm{tr}(A^4) = 1 + 1 + 1 = 3$;
$\det(A^2 + I) = (1+1)(i^2+1)((-i)^2+1) = 0$: $A^2 + I$ n'est pas inversible.

Réponse. $\chi_{P(A)} = \prod (X - P(\lambda_i))$; $\mathrm{tr}A^2 = -1$, $\mathrm{tr}A^4 = 3$, $\det(A^2 + I) = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 13 – Une fausse décomposition de Dunford

a) $D'N' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N'D' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: elles ne commutent pas, ce n'est **pas** une décomposition de Dunford.

b) A a deux valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Par unicité, sa décomposition de Dunford est

$$D = A, \qquad N = 0$$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le binôme « commutatif » donnerait $D'^2 + 2D'N' + N'^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \neq A^2$: sans commutation, le binôme est faux. (Le bon calcul est $D'^2 + D'N' + N'D' + N'^2$.)

Réponse. $D'N' \neq N'D'$; Dunford : $D = A$, $N = 0$; le binôme sans commutation est faux.

Correction de l'exercice 14 – Matrices trigonalisables sur R

a) $\chi_A = (X-1)^2 + 1$, sans racine réelle : non scindé sur $\mathbb{R}$, donc non trigonalisable.

b) $\chi_B = X^2 - 4X + 4 = (X-2)^2$, scindé. $B - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0$: non diagonalisable.
$E_2 = \mathbb{R}(1,1)$; on complète par $e_2 = (0,1)$: $Be_2 = (-1,1) = -(1,1) + 2(0,1)$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Si toutes les racines complexes de χ_A sont réelles, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$: A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Réponse. A : χ non scindé ; $B \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; scindé sur $\mathbb{R} \Rightarrow$ trigonalisable.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : réduction complète

a) - $\mathrm{tr}(A) = 6$, $\det A = 8 + 1 = 9$, donc $\chi_A = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$.

— $A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, de rang 1, donc $d_3 = 1 < 2$: **non diagonalisable**.

b) - **Vecteur propre** : $x + y = 0$ donne $e_1 = (1,-1)$.

— **Vecteur de Jordan** : on résout $(A - 3I)e_2 = e_1$, soit $x + y = 1$; on prend $e_2 = (1,0)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $Ae_2 = (4,-1) = 3(1,0) + (1,-1)$ ✓

— **Puissances** : $T^n = \begin{pmatrix} 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, et $A^n = PT^nP^{-1}$ avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le calcul donne

$$A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3+n & n \\ -n & 3-n \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle pour** $n=1$: $\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ ✓ ; pour $n=2$: $3\begin{pmatrix}5 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 6\\ -6 & 3\end{pmatrix}$, et $A^2=\begin{pmatrix}16-1 & 4+2\\ -4-2 & -1+4\end{pmatrix}$ ✓

— **Autre voie** : Dunford direct, $A=3I+(A-3I)$ avec $(A-3I)^2=0$, donne immédiatement $A^n=3^nI+n3^{n-1}(A-3I)$ — même résultat, sans changement de base.

Réponse. b) $A^n=3^{n-1}\begin{pmatrix}3+n & n\\ -n & 3-n\end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).